

## Τα Αριθμητικά Συστήματα και η Χρήση τους

Συνοπτικός πίνακας συμβολισμού των αριθμών

Σημερινός συμβολισμός (Ινδοαραβικά ψηφία)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
Βαβυλώνιοι	∟	∟∟	∟∟∟	∟∟∟∟ ∟	∟∟ ∟∟	∟∟∟ ∟∟∟	∟∟∟∟ ∟	∟∟∟∟ ∟∟	∟∟∟∟ ∟∟∟	<	∟ <<<	< ∟∟∟ << ∟∟∟ <<
Αιγύπτιοι					 	 	 	 	 	∩	∩	⊕
Μινωική εποχή	Γραμμική Α	 ή ∩	 ή ∩∩	 ή ∩∩∩	 ή ∩∩∩∩	 	 	 	 	•	∩ ή ∩	◇
	Γραμμική Β					 	 	 	 	—	•	⊕
Έλληνες	Ακροφωνικό ή Ηρωδιανικό					∟	 	 	 	Δ	Η	×
	Αλφαβητικό	α'	β'	γ'	δ'	ε'	ς'	ζ'	η'	θ'	ι'	ρ'
Ρωμαίοι	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	C	M

### ΟΜΑΔΑ 1η

Αμέτ Ζεληχά  
Μεχμέτ Αϊσού  
Σελίν Χασάν  
Σινάδος Αντώνης

### ΟΜΑΔΑ 3η

Σιμόπουλος Φίλιππος  
Χαλήλ Χακάν  
Χατζόπουλος Δημήτρης  
Χουσεΐν Χαρούν

### ΟΜΑΔΑ 2η

Θεοχαρίδης Θανάσης  
Κυριακίδης Φώτης  
Νάκας Θανάσης  
Στούρος Ανδρέας

### ΟΜΑΔΑ 4η

Γκαντίδης Δημοσθένης  
Λεπίδας Νικόλαος  
Μανίτσας Πολύδωρος  
Μουγκολίας Γεράσιμος

- 1) Η Γραφή των αριθμών: i) Το αριθμητικό σύστημα των Μάγια.....  
ii) Το αριθμητικό σύστημα των αριθμών.....  
iii) Το Αριθμητικό σύστημα των Αράβων.....  
iv) Το Αριθμητικό σύστημα των Ίνκας.....  
v) Το Αριθμητικό σύστημα των Κινέζων.....  
vi) Το Αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων.....  
vii) Το Αριθμητικό σύστημα των Ρωμαίων.....  
viii) Το Αριθμητικό σύστημα των Βαβυλώνων....  
ix) Το Ακροφωνικό αριθμητικό σύστημα.....  
x) Το Αριθμητικό σύστημα των Ινδοαράβων....  
xi) Το Αριθμητικό σύστημα των Ελλήνων

- 2) Τα Αριθμητικά Συστήματα: i) Το Δυαδικό Αριθμητικό Σύστημα.....  
ii) Το Πενταδικό Αριθμητικό Σύστημα....  
iii) Το Οκταδικό Αριθμητικό Σύστημα...  
iv) Το Δωδεκαδικό Αριθμητικό Σύστημα...  
v) Το Δεκαεξαδικό Αριθμητικό Σύστημα.....  
vi) Το Δεκαδικό Αριθμητικό Σύστημα.....

- 3) Τα Αριθμητικά Συστήματα Διάφορων Λαών: i) Μάγια  
ii) Ινδοί  
iii) Άραβες  
iv) Ίνκας  
v) Κινέζοι  
vi) Αιγύπτιοι  
vii) Ρωμαίοι

- 4) Πράξεις-Μετατροπές:
- viii) Βαβυλώνιοι
  - i) Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα
  - ii) Που χρησιμοποιούνται
  - iii) Ποιο θεωρείται καλύτερο

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα πλαίσια του PROJECT του 2ου τετραμήνου αναλύσαμε τα αριθμητικά συστήματα και τη χρήση τους. Χωριστήκαμε σε 4 ομάδες οι οποίες ανέλαβαν η κάθε μία ένα από τα παρακάτω θέματα:

- 1) Συστήματα αρίθμησης
- 2) Γραφή αριθμών
- 3) Αριθμητικά συστήματα διάφορων λαών
- 4) Πράξεις, μετατροπές και διάφορα άλλα ερωτήματα

## Το αριθμητικό σύστημα των Μάγια και το μηδέν

Από τα χειρόγραφα της Δρέσδης (σπάνια χειρόγραφα της φυλής των Μάγια) προκύπτει ότι η τελεία και η παύλα, ήταν τα δύο μοναδικά σύμβολα του αριθμητικού συστήματος των Μάγια. Η τελεία αντιπροσώπευε τη μονάδα και η παύλα την πεντάδα. Δηλαδή, μια τελεία αντιπροσώπευε την αριθμητική αξία του 1 και μια παύλα το 5. Συνεπώς, το ".\_" για τη φυλή των Μάγια σήμαινε **15**.

Πρόκειται για ένα εξελιγμένο προσθετικό και «θεσιακό» σύστημα, που χρησιμοποιούσαν κατά τον 3ο αιώνα μ.Χ., όπως προκύπτει από τα χειρόγραφά τους. Αν εμείς σήμερα γνωρίζουμε το δεκαδικό σύστημα, οι Μάγια χρησιμοποιούσαν το εικοσαδικό σύστημα, όπου οι τάξεις τους πήγαιναν από τη μονάδα στην εικοσάδα, στοιβάζοντας τους αριθμούς θεσιακά τον έναν πάνω στον άλλον και διαβάζοντας τον αριθμό με κατεύθυνση από πάνω προς τα κάτω. Με αυτό το τρόπο μπορούσαν να πραγματοποιήσουν πολύπλοκους υπολογισμούς.

Ο αριθμός "0" είναι μια άλλη πρωτοπορία της φυλής των Μάγια. Πρόκειται για το σύμβολο που "βασάνισε" τους λαούς που ασχολήθηκαν με την πρώτη αρίθμηση, και που η αξία και σημασία του προέρχεται από την αναγκαιότητα ύπαρξης και εφεύρεσης ενός συμβόλου, για τις τάξεις που είναι μηδενικές. Συμβόλου, που θα μπορεί να εκπροσωπεί το "καθόλου δεκάδες". Στο δικό μας δεκαδικό σύστημα, αν δεν υπήρχε το μηδέν θα ήταν πολύ πιθανό να μπερδεύαμε για παράδειγμα, το 102 με το 12.

Λέγεται πως η φυλή των Μάγια είναι ο πρώτος λαός του κόσμου που χρησιμοποίησε τον αριθμό "0". Στην πραγματικότητα, αυτό είναι τόσο κοντά στην αλήθεια, όσο και μακριά.

0 	1 	2 	3 	4 
5 	6 	7 	8 	9 
10 	11 	12 	13 	14 
15 	16 	17 	18 	19 
20 	21 	22 	23 	24 
25 	26 	27 	28 	29 

## ΙΝΔΟΙ

Οι Ινδουιστές στην Ινδία δημιούργησαν ένα τέτοιο σύνολο από σύμβολα για τους αριθμούς, που το χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα. Οι μορφές των συμβόλων που χρησιμοποιούμε σήμερα δεν είναι ακριβώς ίδιες με αυτές που χρησιμοποιούσαν οι Ινδουιστές πριν από πολλούς αιώνες. Παρόλα αυτά, αν παρατηρήσουμε τους Ινδουιστικούς αριθμούς, μπορούμε να δούμε σε αυτούς τις πρώτες αρχές των αριθμητικών συμβόλων που χρησιμοποιούμε και σήμερα. Από τους Ινδουιστές μαθαίνουμε τα εξής: 1=ένα, 2=δύο, 3=τρία, 4=τέσσερα, 5=πέντε, 6=έξι, 7=επτά, 8=οχτώ, 9=εννιά. Οι αριθμοί εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην Ινδία πριν από 2200 χρόνια περίπου. Τα ψηφία 1,2,3 από πολλούς αποκαλούνται <<αραβικοί αριθμοί>>. Τα επινόησαν όμως αυτοί που είχαν αποφασιστικά στραμμένο το πνεύμα τους στις εφαρμογές στους μεγάλους αριθμούς και τον αριθμητικό λογισμό, οι Ινδοί. Το μηδέν έχει ακόμα μορφή ενός μικρού κύκλου ομοίου με το γράμμα(0) είναι ακριβώς αυτή ενός μικρού κύκλου που το έλεγαν <<σούνια>> που σημαίνει τίποτα. Επίσης δεν είχαν την απαιτούμενη γνώση κάποιου συστήματος θέσης. Γύρω στο 500μ.χ την εποχή που ζούσε ο μαθηματικός Αριαμπάτα αναπτύχθηκε ένα νέο σύστημα θέσης με 10 σύμβολα όπου το ένα από αυτά είναι για το μηδέν. Άλλοι θεωρούν ότι η χρήση αυτού του συστήματος, γενικεύτηκε ύστερα από το 700μχ. Είναι γεγονός ότι αρκετά χρόνια πριν οι Ινδοί είχαν έρθει σε επαφή με τον ελληνικό πολιτισμό και ακόμη ήταν ενημερωμένοι για το έργο του Αστρονόμου Πτολεμαίου. Ο Πτολεμαίος μάλιστα κατά τους υπολογισμούς του με εξηκονταδικά κλάσματα χρησιμοποίησε το σύμβολο<<0>> για το μηδέν.

Για την αναπαράσταση ενός αριθμού επαναλαμβάνονταν τα σύμβολα αυτά όσες φορές χρειαζόταν δηλαδή κάτι ανάλογο με το σύστημα αρίθμησης των Ρωμαίων. Στη γραφή αυτή οι αριθμοί γράφονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά δηλαδή το μικρότερο στοιχείο βρισκόταν στο αριστερό μέρος του

αριθμού. Δεν υπάρχει κάποιο σύμβολο για το μηδέν.

Τέλος η εξέλιξη των σημερινών συμβόλων πραγματοποιήθηκε με τη συνειδητοποίηση του συστήματος θέσης, δηλαδή τα ίδια σύμβολα που χρησιμοποιούμε για τους εννιά πρώτους αριθμούς, να χρησιμοποιούνται και για τα αντίστοιχα πολλαπλάσια οποιασδήποτε δύναμης του δέκα.

ΙΝΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Εκ- 1

Ντας- 10

Σαου-100

Χαζαρ- 1.000

Λακχ- 100.000

Κρορε- 1.000.000

Αραβμπ-10.000.000

Χαραβμπ- 100.000.000.000

Παντμα- 1.000.000.000.000.000

Σακχ- 100.000.000.000.000.000

Μαχασανκχ- 10.000.000.000.000.000.000

## ΑΡΑΒΕΣ

Γύρω στο 800 μ. Χ. όχι πολύ αργότερα από τότε που ανακαλύφθηκε το σύμβολο για το 0, τα Ινδουιστικά ψηφία εξαπλώθηκαν στις χώρες βόρεια και δυτικά της Ινδίας. Οι άνθρωποι που κατοικούσαν στις χώρες αυτές μιλούσαν Αραβικά. Αραβόφωνοι λαοί ζούσαν επίσης, σ' όλη τη βόρεια Αφρική καθώς και στην Ισπανία. Οι ινδουιστικοί αριθμοί εξαπλώθηκαν σ' όλο το τμήμα της Αφρικής και από εκεί στην Ισπανία.

Οι Άραβες ονόμαζαν το σύμβολο για το μηδέν «σιρφ». Οι Ευρωπαίοι ονόμασαν τα αριθμητικά σύμβολα του αραβικού συστήματος αραβικούς αριθμούς ή χαρακτήρες, γιατί είχαν προέλθει από αραβόφωνους λαούς. Οι Ευρωπαίοι, βέβαια, δεν ήξεραν ότι η καταγωγή τους ήταν από την Ινδία. Οι Άραβες δεν επηρεάστηκαν μόνο από τους Ινδούς αλλά δέχτηκαν και την αρχαία ελληνική κληρονομιά. Τέλος, είχαν ανακαλύψει μεθόδους για την απλοποίηση εξισώσεων.

Δηλαδή οι Άραβες δεν ανακάλυψαν ένα δικό τους σύστημα αρίθμησης, αλλά τελειοποίησαν αυτό των Ινδών.

Η μεταφορά και η διάδοση του δεκαδικού συστήματος στις χώρες της Μεσογείου κατ' αρχήν και στην Ευρώπη αργότερα, έγινε από τους Άραβες μαθηματικούς και εμπόρους. Γι' αυτό και το σύστημα αυτό ονομάζεται Ινδοαραβικό.

Ινδικό Σύστημα Αρίθμησης

Το παραδοσιακό ινδικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιείται σήμερα στην Ινδία, στο Πακιστάν και στο Μπαγκλαντές και βασίζεται σε ομαδοποίηση εκατοντάδων αντί για χιλιάδων στο σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται και δέκα χιλιάδων που χρησιμοποιείται στην Κίνα και την Ιαπωνία. Σήμερα στην Ινδία χρησιμοποιούνται συχνά οι όροι «κρόρε»(krore) και «λάκχ»(lakh).

Εκ- (EK) =1

Ντας-(Das) =10

Σαγαστρ-(Sahast) / Χαζάρ-(Hazaar) =1.000

Λακχ- (Lakh) =100.000 (1.00.000)  
Κρόρε-(Crore) =10.000.000 (1.00.00.000)

### Ίνκας

1410-1530 μΧ. Οι Ίνκας έφτιαξαν ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το 10 για να παρακολουθούν τις καθημερινές δραστηριότητες του μεγάλου πληθυσμού τους (Μέσα σε 200 χρόνια είχαν πληθυσμό 6-12.000.000 άτομα). Το αριθμητικό τους σύστημα βασιζόταν στα κουιπού. Τα κουιπού ήταν περίπλοκα συστήματα σπάγκων με κόμπους που χρησίμευαν για την καταχώρηση και αποθήκευση αριθμητικών πληροφοριών. Το σύστημά τους ήταν δεκαδικό, θεσιακό, μη ψηφιακό. Οι Ίνκας έκαναν τις πράξεις τους χρησιμοποιώντας ένα είδος άβακα, το γιουπάνα. Το γιουπάνα ήταν μια πλάκα χωρισμένη σε τετράγωνα πάνω στα οποία τοποθετούσαν σπόρους καλαμποκιού που τους μετακινούσαν από τετράγωνο σε τετράγωνο για να κάνουν τους λογαριασμούς τους .

### ΚΙΝΑ

Από την αρχή η κινέζικη αριθμητική συσχετιζόταν με τα μαντεία. Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται συνήθως σήμερα βρέθηκαν επάνω σε μαντικά οστά και θυρεούς χελώνας. Ο Κινέζικος πολιτισμός χρησιμοποιούσε σύστημα αριθμών με βάση το 60. Για τους Κινέζους δεν υπήρχε το 0, το οποίο δεν χρησιμοποιήθηκε πριν από τον 15ο αιώνα πΧ. Χρησιμοποιούσαν αυστηρή δεκαδική σημειογραφία, πράγμα που καθιστά το κινέζικο αριθμητικό σύστημα τελείως ανεξάρτητο από εκείνο που χρησιμοποιήθηκε στη Μεσοποταμία. Γνώριζαν γραμμικές εξισώσεις , αόριστες εξισώσεις και αρνητικούς αριθμούς. Είχαν υπολογίσει το π με πολύ υψηλό αριθμό ακριβείας, δίνοντας του ανώτερες και κατώτερες τιμές όπως 3,1415927 και 3,1415926.... Επίσης , έκαναν αστρονομικούς υπολογισμούς 1500 χρόνια πριν από τους αρχαίους Έλληνες. Τα μαθηματικά τους ήταν ανώτερα των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων. Το παλαιότερο κινέζικο μαθηματικό κείμενο είναι το Τσόου Πει Σαουντσινγκ, που γράφτηκε μεταξύ του 500 και του 200 π.Χ. Η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης στην Κίνα εξελίχθηκε σχετικά απομονωμένη από την ταυτόχρονη εξέλιξή της σε άλλους πολιτισμούς. Οι λόγοι ήταν πολλοί. Σημαντική αιτία ήταν η γεωγραφική θέση της Κίνας η οποία περιορίζεται από πολλά και μεγάλα φυσικά εμπόδια (βουνά και θάλασσα). Εξάλλου χαρακτηριστικό είναι ότι σε περιόδους κατάκτησης της Κίνας από ξένους καταδρομείς οι θεσμοί των Κινέζων με τις παραδόσεις και τον πολιτισμό τους ενισχύονται ακόμα περισσότερο αντί να στρέφονται στα ξένα στοιχεία. Είναι από το 1000 π.Χ. ακόμα υπάρχει μια ομαλή πολιτισμική συνέχεια στην Κίνα και είναι ενδιαφέρον να μελετήσει κανείς την πορεία της μαθηματικής σκέψης που παρουσιάζει περιόδους ραγδαίας ανάπτυξης όπως και περιόδους στασιμότητας και παρακμής. Θα ήταν όμως λάθος να θεωρούνται τα Κινέζικα μαθηματικά των μεταγενέστερων χρόνων φαινόμενο εντελώς απομονωμένο, με τον τρόπο που είναι ίσως τα μαθηματικά των Μάγια. Υπήρχαν πάντοτε, τουλάχιστον από την εποχή των Χαν, αξιόλογες εμπορικές και πολιτισμικές διασυνδέσεις με άλλα μέρη της Ασίας, ακόμα και της Ευρώπης. Η ινδική επιστήμη και στην συνέχεια η Αραβική είχαν την

επίδραση τους στην κινεζική, αλλά και η κινεζική με την σειρά της άφησε την σφραγίδα της πάνω στις επιστήμες άλλων χωρών. Ένα παράδειγμα είναι το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και η χρήση των αρνητικών αριθμών, που μάλλον εκπορεύτηκαν από την Κίνα προς την Ινδία. Ωστόσο, ασήμαντες ή μηδαμινές είναι οι ενδείξεις Ελληνικής επιρροής, παρόλο που σημειώθηκε κάποια παράλληλη ανάπτυξη.

Από τον 4<sup>ο</sup> αιώνα π.χ. χρησιμοποιούνταν αριθμητικοί πίνακες για υπολογισμούς και οι Κινέζοι πρέπει να είναι οι πρώτοι που τους χρησιμοποίησαν. Οι πίνακες αυτοί σχετίζονται με τον τρόπο αναπαράστασης των αριθμών με ξυλάκια. Οι πίνακες αυτοί με τα ξυλάκια είναι ένα είδος αρχαίων υπολογιστικών μηχανών. Οι αρνητικοί αριθμοί αναπαριστάνονται με ξυλάκια διαφορετικού χρώματος. Τα ξυλάκια των θετικών ψηφίων είχαν συνήθως κόκκινο χρώμα ενώ των αρνητικών μαύρο. Ο άβακας ο οποίος είναι επίσης κινεζική επινοήση χρησιμοποιήθηκε πολύ αργότερα, κατά τον 14<sup>ο</sup> αιώνα περίπου.

## ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι την αριθμητική την παρέλαβαν από τους Βαβυλώνιους. Δημιούργησαν 2 είδη γραφής, την αιγυπτιακή ιερογλυφική και την αιγυπτιακή ιερατική. Ήταν οι πρώτοι που παρίσταναν τον κάθε αριθμό με το ίδιο κατακόρυφο σημάδι, που μοιάζει με δάκτυλο. Έφτιαξαν το σημάδι I για να παριστάνουν τον αριθμό ένα. Είχαν έναν ορισμένο τρόπο για να γράφουν τα σύμβολα. π.χ. Για το πέντε δεν έγραφαν IIII αλλά έγραφαν III και αμέσως από κάτω II. Ήταν πιο εύκολο να δει κανείς τρία σημάδια στη σειρά και έπειτα δυο ξέχωρα σημάδια, από το να διακρίνει πέντε σημάδια στην ίδια σειρά. Κάτι παρόμοιο κάνουμε κι εμείς σήμερα για το πέντε. Επίσης για το δέκα χρησιμοποιούσαν ένα σύμβολο σαν ανάποδο U. Επίσης σκέφτηκαν ότι δε χρειάζεται να γραφεί ή να μετρηθεί περισσότερο από εννιά φορές ένα σύμβολο και έτσι επινόησαν ένα καινούργιο σύμβολο για κάθε φορά που έπρεπε να γραφεί κάποιο σύμβολο δέκα φορές. Έτσι χρησιμοποίησαν ένα σύμβολο σαν σπείρα που μοιάζει λίγο με αυτό: 9. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι έδωσαν ιδιαίτερη σημασία στον αριθμό δέκα και ότι για τους αριθμούς από το 1 μέχρι 999 δεν χρειαζόταν να θυμούνται παρά τρία σύμβολα. Επίσης έπρεπε να βρεθεί ένα καινούργιο σύμβολο για το χίλια, το δέκα χιλιάδες κ.ο.κ. Μ' αυτή τη μέθοδο βρίσκουμε ένα καινούργιο σύμβολο κάθε φορά που χρειαζόμαστε δέκα από τα μικρότερα σύμβολα.

Πρόβλημα παραμένει αν γνώριζαν ή όχι και το δεκαδικό σύστημα. Οπωσδήποτε είναι γνωστό ότι δεν γνώριζαν το 0. Χρησιμοποιούσαν όμως τις κλασματικές μονάδες, όπως το  $\frac{1}{2}$ . Επίσης γνώριζαν την τιμή του  $\pi=3,14$ .





## ΡΩΜΑΙΟΙ

Το **Ρωμαϊκό σύστημα αναπαράστασης αριθμών**, που χρησιμοποιείτο ευρέως στην [Αρχαία Ρώμη](#), αλλά επιβιώνει ακόμη και στις μέρες μας σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, είναι ένα σύστημα που απεικονίζει τους [αριθμούς](#) με συνδυασμούς γραμμάτων του [λατινικού αλφάβητου](#) που ανάλογα με τη διάταξη τους, προστίθενται ή αφαιρούνται. Βασίζεται στο αντίστοιχο σύστημα αναπαράστασης των [Ετρούσκων](#). Στην αρχική του μορφή περιελάμβανε 5 γράμματα (**I**, **V**, **X**, **L** και **C**). Οι δέκα πρώτοι αριθμοί στο ρωμαϊκό σύστημα αναπαράστασης αριθμών είναι :

**I=1, II=2, III=3, IV=4, V=5, VI=6, VII=7, VIII=8 , IX=9 και X=10**

Το σημερινό σύστημα περιλαμβάνει 7 γράμματα αναπαράστασης με τις κάτωθι αξίες

στο δεκαδικό σύστημα:

- $I = 1$
- $V = 5$
- $X = 10$

- $L = 50$
- $C = 100$
- $D = 500$
- $M = 1.000$

### Κανόνες σύνταξης

Οι κανόνες αναπαράστασης έχουν ως εξής:

- Όταν έχουμε δύο ή τρία ίδια γράμματα στη σειρά τότε οι αξίες των γραμμάτων προστίθενται:  $II=2$ ,  $CC=200$ ,  $III=3$ ,  $XXX=30$ ,..
- Όταν έχουμε δύο γράμματα στη σειρά, και το γράμμα που βρίσκεται στα δεξιά είναι μικρότερης αξίας από το γράμμα που βρίσκεται αριστερά τότε προστίθενται οι αξίες των γραμμάτων:  $VI=6$ ,  $XI=11$ ,  $DC=600$ ,  $XV=15$
- Όταν έχουμε δύο γράμματα στη σειρά και το γράμμα που βρίσκεται στα δεξιά είναι μεγαλύτερης αξίας ή το γράμμα στα αριστερά μικρότερης αξίας τότε αφαιρούνται:  $IV=4$ ,  $IX=9$ ,  $CD=400$ .

### Παρατηρήσεις

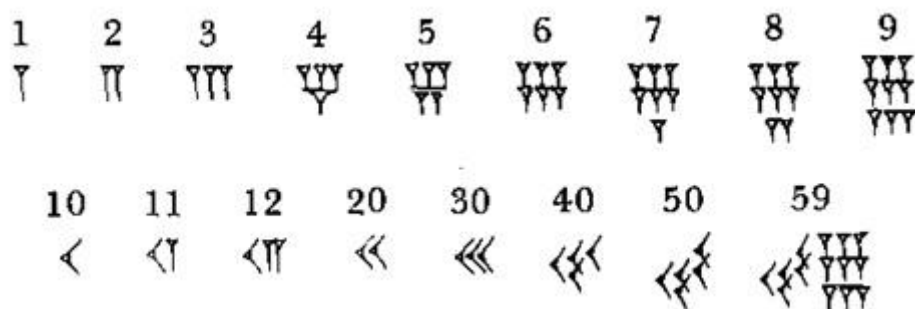
Τα σύμβολα **I**, **X**, **C** και **M** μπορούν να επαναληφθούν διαδοχικά μέχρι τρεις φορές. Κατ' εξαίρεση στα καντράν ρολογιών συχνά υπάρχει και η αναπαράσταση **IIII** που αντιστοιχεί στον αριθμό 4.

- Τα σύμβολα **D**, **L**, και **V** δεν μπορούν να επαναληφθούν.
- Το σύμβολο **I** μπορεί να αφαιρεθεί μόνο από τα σύμβολα **V** και **X**.
- Το σύμβολο **X** μπορεί να αφαιρεθεί μόνο από τα σύμβολα **L** και **C**.
- Το σύμβολο **C** μπορεί να αφαιρεθεί μόνο από τα σύμβολα **D** και **M**.
- Τα σύμβολα **V**, **L** και **M** δεν αφαιρούνται ποτέ.
- Το δεκαδικό ψηφίο **0** και ο αριθμός "0" δεν αναπαρίστανται και δεν υπάρχουν στους ρωμαϊκούς αριθμούς.

### Αριθμητικό σύστημα Βαβυλωνίων

Οι Βαβυλώνιοι εφαρμόζαν ένα ατελές εξηνταδικό σύστημα θέσης Ένα πλήρες όμως εξηνταδικό σύστημα θέσης απαιτεί την ύπαρξη ενός συμβόλου για το 0 και 59 άλλων συμβόλων για τα υπόλοιπα ψηφία. Οι Βαβυλώνιοι όμως δεν είχαν σύμβολο για το 0 και τα άλλα 59 ψηφία τα έγραφαν συνδυάζοντας δύο μονάχα διαφορετικά σύμβολα.

••	τή σφήνα	Υ	για τής μονάδες.
<	τή γωνιά	<	για τής δεκάδες.



**Βασικό μειονέκτημα είναι η έλλειψη ειδικού συμβόλου για το μηδέν.** Επίσης, το γεγονός ότι το ίδιο σύμβολο παριστάνει τις ίδιες βασικές μονάδες όλων των τάξεων, έχει το μειονέκτημα ότι προκαλεί δυσκολίες και μερικές φορές σύγχυση στην αναγνώριση των αριθμών. **Έχει όμως και αρκετά πλεονεκτήματα.** Βασικό πλεονέκτημα είναι ότι μπορούν να γραφούν αρκετά μεγάλοι αριθμοί με τη χρήση λίγων συμβόλων. Ένα δεύτερο σημαντικό πλεονέκτημα, είναι ότι τα κλάσματα μπορούν να γραφούν με τα ίδια σύμβολα όπως και οι ακέραιοι και οι πράξεις με κλάσματα να γίνουν με την ίδια ευκολία όπως γίνονται και οι πράξεις με ακεραίους.

### Ακροφωνικό Σύστημα

Το πρώτο ελληνικό σύστημα αρίθμησης είναι το **ακροφωνικό σύστημα** που ήταν εν χρήση στην πρώτη χιλιετία π.Χ. «Ακροφωνικοί» σημαίνει ότι τα σύμβολα για τους αριθμούς προέρχονται από το πρώτο γράμμα του ονόματος του αριθμού.

### Ακροφωνικοί 5, 10, 100, 1000, 10000

Γ	Δ	Η	Χ	Μ
Pente	Deka	Hekaton	Khilioi	Murioi
Πεντε	Δεκα	Ηεκατων	Χιλιοι	Μυριοι
5	10	100	1000	10000

1-10 σε Ελληνικούς ακροφωνικούς αριθμούς

I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 - 10 in Greek acrophonic numbers									

Το σύμβολο για "το ένα", είναι ένα απλό "I", το οποίο ήταν μια προφανής σημείωση που δεν προέρχεται από το αρχικό γράμμα του αριθμού.

Αυτό που είναι πιο παράξενο είναι ότι το σύστημα είχε ενδιάμεσα σύμβολα

Δ	Ϛ	H	Γ <sup>Α</sup>	X	Ϛ <sup>Α</sup>	M	Ϛ <sup>Α</sup>
10	50	100	500	1000	5000	10000	50000
Higher numbers and combining acrophonic numerals							

για τους αριθμούς 50 ..500 ..5000, και 50000 αλλά δεν ήταν νέοι χαρακτήρες, μάλλον σύνθετα σύμβολα που έγιναν από 5 και τα σύμβολα για 10 ..100 ..1000 ..10000 αντίστοιχα.

## ΙΝΔΟΑΡΑΒΙΚΗ ΓΡΑΦΗ ΑΡΙΘΜΩΝ Το μηδέν

Το πρώτο πράγμα που συμβαίνει με τον μηδέν είναι ότι υπάρχουν δύο σχετικά διαφορετικές χρήσεις του. Αντιστοιχεί με άλλα λόγια σε δύο διαφορετικές σημασίες.

Η μία είναι ότι εκείνη που τον θέλει ως δείκτη της κενής θέσης στο σύστημα γραφής των αριθμών. Ο μηδέν είναι δηλαδή σύμβολο αναγκαίο για να δείξουμε ότι το 371 σημαίνει κάτι διαφορετικό από το 3071.

Η δεύτερη χρήση του μηδενός είναι εκείνη που τον βλέπει ως αριθμό , ανάμεσα στον +1 και στον -1. Οι άνθρωποι άργησαν να ανακαλύψουν το μηδέν κι αυτό γιατί ο μηδέν είναι μακριά από κάθε διαισθητικά αποκαλυπτόμενη μαθηματική έννοια. .

Οι Ινδοί μαθηματικοί [Brahmagupta](#), Mahavira και Bhaskara προσπάθησαν να απαντήσουν σε αυτό το ερώτημα. Οι απαντήσεις που έδωσαν θυμίζουν την σημερινές για τον ρόλο του αριθμού Μηδέν με εξαίρεση τη διαίρεση δια του αριθμού Μηδέν την οποία ο Brahmagupta αποδέχεται, θεωρώντας το αποτέλεσμα της ως ένα κλάσμα  $a/0$ . Αποδέχεται επίσης τη διαίρεση  $0/0$ . Ωστόσο παρά τα σημαντικά αυτά σφάλματα το έργο του Brahmagupta είναι η πρώτη – εξ όσων γνωρίζουμε σήμερα – εκπληκτική στο μέγεθός της προσπάθεια ανθρώπου να διευρύνει το σύνολο των αριθμών με τον Μηδέν

και με τους αρνητικούς. Είναι μια μεγάλη στιγμή των Μαθηματικών.

Μετά τον Brahmagupta, ο επίσης Ινδός Mahavira θα παρουσιάσει ένα ακόμα εξαιρετο βιβλίο στο οποίο όμως θα υποστηρίξει ότι  $n/0 = n$  «εάν δηλαδή ένας αριθμός διαιρεθεί με τον Μηδέν παραμένει αναλλοίωτος». 300 περίπου χρόνια αργότερα ο επί της Ινδός Bhaskar συμπληρώνει τους προηγούμενους με τις ισότητες  $0^2 = 0$  και  $0/0 = 0$  και προσπαθεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της διαίρεσης με τον Μηδέν γράφοντας ότι  $n/0 = \infty$ .

## Ελληνικό σύστημα αρίθμησης

### Ακέραιοι αριθμοί

Οι αρχαίοι Έλληνες έγραφαν όλους τους αριθμούς από το 1 ως το 999 με γράμματα του αλφαβήτου και με τη [βοήθεια](#) σημείων στίξεως, τα οποία ήταν

- «´» η κεραία επάνω και μετά από το γράμμα,
- «,» η ανάποδη κεραία κάτω και πριν από το γράμμα,
- «.» η τελεία μεταξύ των γραμμάτων και
- «¨» τα διαλυτικά επάνω από το γράμμα.

Χρησιμοποιούνται και κεφαλαία, προ πάντων για δυναστικά ονόματα και κεφάλαια βιβλίων.

Σε ελληνικά νομίσματα της εποχής του 19ου και των αρχών 20ού αιώνα, αντί για το σύμβολο (´) έχει χρησιμοποιηθεί και το θαυμαστικό, π.χ. Α!

Έτσι έχουμε

- α´ β´ γ´ δ´ ε´ ς´ ζ´ η´ θ´ τους αριθμούς 1 2 3 4 5 6 7 8 9 αντίστοιχα
- ι´ κ´ λ´ μ´ ν´ ξ´ ο´ π´ ς´ τους αριθμούς 10 20 30 ... 90 αντίστοιχα
- ρ´ σ´ τ´ υ´ φ´ χ´ ψ´ ω´ ϡ´ τους αριθμούς 100 200 300 ... 900 αντίστοιχα

Το Ε´ χρησιμοποιείτο ως **έξι** στην αρχαιότητα. Αντικαταστάθηκε από το **στίγμα** σταδιακά, αφού είχε πάψει πρώτα να χρησιμοποιείται ως γράμμα. Τις τελευταίες δεκαετίες το στίγμα εξαφανίστηκε από τον γραπτό λόγο για πρακτικούς κυρίως λόγους και τη θέση του πήρε το **Στ´**.

Για τους αριθμούς 1-9999 χρησιμοποιούνταν τα εξής γράμματα:

Γράμμα α	Αξία	Γράμμα α	Αξία	Γράμμα α	Αξία	Γράμμα α	Αξία
<u>Α</u> '	1	<u>Ι</u> '	10	<u>Ρ</u> '	100	,Α	1000
<u>Β</u> '	2	<u>Κ</u> '	20	<u>Σ</u> '	200	,Β	2000
<u>Γ</u> '	3	<u>Λ</u> '	30	<u>Τ</u> '	300	,Γ	3000
<u>Δ</u> '	4	<u>Μ</u> '	40	<u>Υ</u> '	400	,Δ	4000
<u>Ε</u> '	5	<u>Ν</u> '	50	<u>Φ</u> '	500	,Ε	5000
<u>Ζ</u> '	6	<u>Ξ</u> '	60	<u>Χ</u> '	600	,Ζ	6000
<u>Ζ</u> '	7	<u>Ο</u> '	70	<u>Ψ</u> '	700	,Ζ	7000
<u>Η</u> '	8	<u>Π</u> '	80	<u>Ω</u> '	800	,Η	8000
<u>Θ</u> '	9	<u>Ϛ</u> '	90	<u>ϛ</u> '	900	,Θ	9000

## Αριθμητικά Συστήματα

Το όνομα ενός συστήματος αρίθμησης προέρχεται από τον αριθμό των ψηφίων που χρησιμοποιεί για την παράσταση των αριθμών.

- Ο αριθμός αυτός ονομάζεται «βάση» του συστήματος
- Το δεκαδικό σύστημα (βάση 10) χρησιμοποιεί τα ψηφία 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9
- Το δυαδικό σύστημα (βάση 2) χρησιμοποιεί τα ψηφία 0,1
- Το οκταδικό σύστημα (βάση 8) χρησιμοποιεί τα ψηφία 0,1,3,4,5,6,7
- Το δεκαεξαδικό σύστημα (βάση 16) χρησιμοποιεί τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E και F

Ένα από τα σύμβολα σημαίνει την **έλλειψη ποσότητας, το μηδέν**, και τα άλλα σύμβολα διαφέρουν από το προηγούμενό τους (όπως τα έχουμε καταγράψει) κατά μια ακέραιη μονάδα

### Δυαδικό Σύστημα

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης αναπαριστά αριθμητικές τιμές χρησιμοποιώντας δύο σύμβολα, το 0 και το 1. Πιο συγκεκριμένα, το δυαδικό είναι ένα θεσιακό σύστημα με βάση το 2. Κάθε ψηφίο ανήκει σε μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη κατά ένα από αυτήν του ψηφίου στα δεξιά του. Έτσι, κάθε ψηφίο ενός δυαδικού αριθμού από δεξιά προς τα αριστερά δηλώνει μονάδες, δυάδες, τετράδες κ.ο.κ.

Ονομάζεται δυαδικό επειδή η αναπαράσταση της πληροφορίας γίνεται με χρήση δύο συμβόλων.

Πρόσθεση δυαδικών αριθμών

Για την πρόσθεση των δυαδικών αριθμών ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες :

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ και } 1 \text{ το κρατούμενο}$$

$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ και } 1 \text{ το κρατούμενο}$$

Έτσι για παράδειγμα, για να προσθέσουμε σε μορφή ψηφιολέξης (byte) τους αριθμούς 121 και 107 έχουμε :

$$(121) 01111001$$

$$(107) 01101011 +$$

$$(228) 11100100$$

Όπου η πρόσθεση αρχίζει όπως και στο δεκαδικό από τα δεξιά, δηλαδή από την λιγότερο σημαντική θέση.

Δυαδικό σύστημα στους υπολογιστές

Η αποθήκευση και επεξεργασία των δεδομένων στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές γίνεται ψηφιακά. Οδηγώντας, για παράδειγμα, την είσοδο ενός λογικού κυκλώματος με τάση ρεύματος μεγαλύτερη μιας συγκεκριμένης τιμής (π.χ. +3 Volts) αναπαριστούμε το ψηφίο "1", ενώ οδηγώντας την είσοδο με τάση ρεύματος μικρότερη μιας συγκεκριμένης τιμής (π.χ. +2 Volts) αναπαριστούμε το ψηφίο "0". Λόγω της σχετικά απλής υλοποίησης στα ηλεκτρονικά κυκλώματα το δυαδικό σύστημα χρησιμοποιείται εκτεταμένα στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές για την αναπαράσταση αριθμητικών δεδομένων. Άλλα χρησιμοποιούμενα συστήματα είναι το σύστημα κινητής υποδιαστολής, το σύστημα σταθερής υποδιαστολής, η δυαδική κωδικοποίηση δεκαδικού, και άλλα.

## Πενταδικό Σύστημα

**Πενταδικό σύστημα (βάση-πέντε)** είναι ένα σύστημα αρίθμησης με το πέντε σαν βάση. Αυτό δημιουργήθηκε από τα πέντε δάχτυλα του κάθε χεριού, και είναι το πιο πρωτόγονο σύστημα αρίθμησης.

Το πενταδικό αριθμητικό σύστημα, χρησιμοποιεί πέντε αριθμούς, από το 0 ως το 4, για να αντιπροσωπεύσει οποιοδήποτε πραγματικό αριθμός. Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο, το πέντε γράφεται ως 10, το είκοσι πέντε γράφεται ως 100, το εξήντα γράφεται ως 220.

Στον εικοστό αιώνα, μόνο η ανατολική αφρικανική φυλή Luo (Κένυα) [και Yoruba](#) (Νιγηρία), χρησιμοποιεί ακόμα ένα σύστημα με βάση το πέντε (5). Εντούτοις, το δεκαδικό σύστημα έχει επικρατήσει στις περισσότερες περιοχές.

Αλλά, το πέντε είναι ο πρωταρχικός αριθμός. Λόγω του ότι το πενταδικό σύστημα χρησιμοποιείται ως βάση του δεκαδικού.

## Οκταδικό Σύστημα

Το οκταδικό σύστημα έχει βάση το **8** και ψηφία τα **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**. Στο οκταδικό σύστημα για να βρούμε την τιμή ενός ψηφίου το πολλαπλασιάζουμε με την κατάλληλη δύναμη του 8, μας επιτρέπει να διατρέχουμε ευκολα μακρές σειρές εύκολα μακρές σειρές απο 0 και 1 του δυαδικού συστήματος.

## Δωδεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης

Το δωδεκαδικό σύστημα προέρχεται από τη νεολιθική εποχή και παρέμεινε



ως συμπληρωματικό του δεκαδικού σήμερα.

Απομεινάρια του συναντούμε στη μέτρηση σκευών της κουζίνας (ντουζίνα) και στη μέτρηση των αβγών σε 12-άδες. Επιπλέον, η δωδεκάδα, ο χωρισμός της ημέρας και της νύχτας σε 12 ώρες και του έτους σε 12 μήνες αποτελούν κατάλοιπα του αρχέγονου δωδεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Γενικά, ο αριθμός 12 αντιπροσωπεύει έναν πλήρη κύκλο και έχει ένα σημαντικό χαρακτήρα που ήταν από τους πιο αξιοσημείωτους στους αρχαίους πολιτισμούς.

Αρχικά, οι Σουμέριοι ιερείς-αστρονόμοι όπως και οι Εβραίοι κατάφεραν να διαιρέσουν το έτος σε μικρότερες μονάδες. Διαμόρφωσαν μ'αυτόν τον τρόπο το σεληνιακό έτος που είχε δώδεκα μήνες των 30 περίπου ημερών και το ημερονύκτιό τους είχε δώδεκα ντάννα.

Στη συνέχεια, οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν το ηλιακό έτος των 360 ημερών που διαιρούνταν σε 12 μήνες των 30 ημερών. Τέλος, οι αρχαίοι Αιγύπτιοι διαίρεσαν τη μέρα σε 12 ώρες και 12 τη νύχτα.

Όσον αφορά την Κίνα μπορούμε να πούμε πως ο ζωδιακός κύκλος αντιπροσωπεύεται από δώδεκα ζώα που το καθένα ασκεί επίδραση για ένα χρόνο. Αλλά και οι 12 πρώτες ημέρες του έτους ήταν πολύ σπουδαίες από θρησκευτική άποψη, διότι ήταν αφιερωμένες σε ειδικές ιεροτελεστίες. Μ'αυτές τις 12 ημέρες συνδέθηκε η γιορτή της μεγάλης νύχτας όταν οι Κινέζοι αστρονόμοι συνειδητοποίησαν τη φαινομενική κίνηση του Ήλιου και τη δίοδό του από τα ηλιοστάσια.

Περνώντας μετά στο Χριστιανισμό βλέπουμε ότι 12 ήταν οι μαθητές του Χριστού όπως και 12 ήταν τα Ευαγγέλια.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως ο αριθμός 12 ήταν σημαντικός από τους αρχαίους πολιτισμούς και γι'αυτό χρησιμοποιήθηκε ως μονάδα μέτρησης και δημιουργήθηκε το δωδεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

### Δεκαεξαδικό Σύστημα

Το δεκαεξαδικό σύστημα χρησιμοποιείται γιατί μας επιτρέπει να διατρέχουμε εύκολα μακρές σειρές από 0 και 1 του δυαδικού συστήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι  $16 = 2^4$ . Γράφοντας λοιπόν τα ψηφία του δεκαεξαδικού σαν τριάδες του δυαδικού, μπορούμε να αντικαθιστούμε 4 δυαδικά ψηφία με ένα δεκαεξαδικό.

Το δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης είναι ένα θεσιακό σύστημα αναπαράστασης αριθμών. Έχει ως βάση του τον αριθμό 16. Αυτό σημαίνει ότι, σε μια σειρά ψηφίων, κάθε ψηφίο έχει αξία 16 φορές μεγαλύτερη από εκείνο που βρίσκεται αμέσως δεξιά του. Δηλαδή, οι θέσεις των ψηφίων στο δεκαεξαδικό σύστημα δηλώνουν μονάδες, άδες, άδες κ.ο.κ., σε αναλογία με το δεκαδικό σύστημα, όπου οι θέσεις δηλώνουν δυνάμεις του δέκα (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες...)

Για την αναπαράστασή του, το δεκαεξαδικό σύστημα έχει ανάγκη 16 ψηφίων. Για τα πρώτα δέκα, χρησιμοποιούνται τα ψηφία 0 - 9 της αραβικής αναπαράστασης του δεκαδικού συστήματος. Για να αναπαρασταθούν οι αξίες

από το 10 έως και το 15, δανειζόμαστε τα πρώτα 6 κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου: A, B, C, D, E και F.

Η αρχική χρήση του ήταν στους υπολογιστές, μιας και είναι εύκολη η μεταφορά ενός αριθμού από το δυαδικό, δηλαδή την γλώσσα μηχανής. Η μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού στο δεκαεξαδικό σύστημα είναι εύκολη υπόθεση αρκεί να σκεφτούμε ότι κάθε δεκαεξαδικός αριθμός αποτελείται από έναν 4ψήφιο δυαδικό. Οι εντολές στους αρχικούς υπολογιστές γράφονταν σαν δεκαεξαδικοί αριθμοί και η γλώσσα μηχανής είναι βασισμένη σε αυτούς.

Το δεκαεξαδικό σύστημα παρουσιάζει ειδικό ενδιαφέρον, γιατί υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε κάθε δεκαεξαδικό ψηφίο και σε κάθε μία από τις ομάδες 4 ψηφίων του δυαδικού συστήματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το 16 είναι δύναμη του 2, . Εύκολα προκύπτει από αυτό ότι

υπάρχουν 16 δυνατοί συνδυασμοί 4 ψηφίων, το καθένα από τα οποία μπορεί να είναι είτε "0" είτε "1", δηλ. τα ψηφία του δυαδικού συστήματος. Κάθε ένας από αυτούς τους συνδυασμούς αντιστοιχεί στο δεκαεξαδικό ψηφίο που παριστάνει την αριθμητική αξία του, ως εξής:

Λόγω της αντιστοιχίας αυτής, το δεκαεξαδικό σύστημα, όπως και το οκταδικό, παίζουν σπουδαίο ρόλο στον προγραμματισμό των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η κύρια χρησιμότητά τους είναι να συμπύσσουν ομάδες από bits (κάθε bit αναπαριστά ένα δυαδικό ψηφίο). Για παράδειγμα, δύο δεκαεξαδικά ψηφία μπορούν να κωδικοποιήσουν μια ψηφιολέξη (byte), δηλ. μια σειρά από 8 bits.

### Δεκαδικό σύστημα

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι ένα σύστημα αρίθμησης με βάση το δέκα. Όπως συμβαίνει με όλα τα σύστημα αρίθμησης είναι ένα σύστημα που χρησιμοποιεί ο άνθρωπος έτσι ώστε να περιγράψει ποσότητες ή πλήθος αντικειμένων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση για την δημιουργία των ονομασιών των ποσοτήτων χρησιμοποιούνται δέκα σύμβολα τα γνωστά μας : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9. Για το λόγο αυτό λέγεται «δεκαδικό» και για το λόγο αυτό λέμε ότι έχει βάση το δέκα. Έτσι κάθε ποσότητα θα αποκτήσει έναν συμβολισμό σύμφωνα με το δεκαδικό σύστημα, ο οποίος δεν θα είναι τίποτα άλλο από μία ακολουθία από τα προαναφερόμενα δέκα σύμβολα. Π.χ. μία ποσότητα από δεκαπέντε χιλιάδες πράγματα συμβολίζεται ως 15000.

Συνοψίζοντας το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης ποσοτήτων σε ακολουθίες συμβόλων. Τα σύμβολα που είναι διαθέσιμα στο δεκαδικό είναι δέκα.

Το πιο διαδεδομένο σύστημα θέσης είναι σήμερα το δεκαδικό. Αυτό συμβαίνει γιατί το σύστημα αυτό έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Είναι σύστημα θέσης και δέκα μονάδες μιας τάξης δίνουν μια μονάδα της αμέσως ανώτερης τάξης.
- Έχει ειδικό σύμβολο για το μηδέν και ξεχωριστό σύμβολο για κάθε αριθμό μικρότερο από τη βάση. Τα σύμβολά του είναι: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 και 9.
- Τα σύμβολα αυτά είναι πολύ απλά εύχρηστα καθώς μπορούν να σχεδιαστούν εύκολα ακόμα και από μικρά ψηφίδια και μπορούν να συνδυαστούν για να συμβολίσουν οποιοδήποτε αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο.

-Οι πράξεις γίνονται αρκετά εύκολα με τη χρησιμοποίηση αυτών των συμβόλων.

-Ο αριθμός 10, που είναι βάση του συστήματος είναι εύκολος στη γραφή και οι δυνάμεις του οι οποίες αποτελούν τις μονάδες των τάξεων του συστήματος, μπορούν να υπολογιστούν εύκολα. Η βάση 10 είναι περισσότερο λειτουργική από άλλες πολύ μικρές βάσεις, όπως π.χ. το 2. Για παράδειγμα, ο αριθμός 5321 χρειάζεται μόνο τέσσερα ψηφία για να συμβολιστεί στο δεκαδικό σύστημα, ενώ ο ίδιος αριθμός στο δυαδικό σύστημα χρειάζεται 13 ψηφία, αφού στο σύστημα αυτό γράφεται 10100110010012.

Ωστόσο, και σε συστήματα με άλλες βάσεις (π.χ. το 5, το 7, το 8, το 12) οι πράξεις θα μπορούσαν να γίνουν σχετικά εύκολα, με τους ίδιους κανόνες και με τεχνικές απόλυτα ανάλογες με αυτές που χρησιμοποιούμε στο δεκαδικό σύστημα. Η διαφορά θα ήταν ότι θα είχαμε να υπολογίσουμε δυνάμεις και πολλαπλάσια των αριθμών 5, 7, 8, 12 αντίστοιχα, αντί για δυνάμεις και πολλαπλάσια του 10 που είναι ευκολότερες.

## ΑΡΧΑΙΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ

Οι αρχαίοι Έλληνες δεν έδωσαν λύσεις βιώσιμες στο πρόβλημα παραστάσεις των φυσικών αριθμών. Χρησιμοποιούσαν για την παράσταση των αριθμών το αλφάβητό τους. Οι Έλληνες παρίσταναν τους φυσικούς αριθμούς με 2 τρόπους. Κατά τον ένα για τους 5,10,1000 χρησιμοποιούσαν τα γράμματα Π, Δ, Η, Χ δηλαδή τα αρχικά των λέξεων 5,10,100,1000 (το Η ήταν το αρχικό της λέξης εκατό)

Για το πενταπλάσιο ενός αριθμού χρησιμοποιούσαν το σύμβολο του αριθμού κάτω από το Π έτσι το Π, Π σήμαινε αντίστοιχα  $5 \cdot 1000, 5 \cdot 10$ . Για το 1 χρησιμοποιούν το σύμβολο Ι. Η παράσταση των αριθμών γινόταν με τα γράμματα του τότε αλφαβήτου και με τη χρησιμοποίηση της θέσης του καθενός τους στο αλφάβητο ως εξής {τα α, β, γ, δ, ε, σ{στίγμα}ζ, η, θ για τους 1,2,3,4,5,6,7,8,9{μονάδες}, τα ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π για τους 10,20,30,40,50,60,70,80,90{δεκάδες} τα ρ, σ, τ, η, φ, χ, ψ, ω{σαμπίγια} για τους 100,200,300,400,500,600,700,800,900{εκατονταετές}. Κατά την γραφή αυτή ια, β, κγ, ρα, κλπ .... Σήμαιναν αντίστοιχα  $=10+1\{=11\}, 10+2\{=12\}, 20+3\{=23\}, 100+1\{=101\}$  κτλ. Το πρόβλημα με αυτό το αριθμητικό σύστημα ήταν ότι δεν ήταν δυνατή η παράσταση μεγάλων αριθμών με έναν περιορισμένο αριθμό συμβόλων.

Πραγματικά εξέχουσες ανακαλύψεις στα μαθηματικά ήταν αυτές που έγιναν από τον Πυθαγόρα και τους μαθητές του. Αφορούσαν όχι μόνο τους περιττούς και άρτιους ή τους απλούς αριθμούς που αναφέρονται σε σχήματα δηλαδή σε αριθμούς που επινοήθηκαν για να παραστήσουν τα σημεία ενός επίπεδο σχήματος ή ενός τρισδιάστατου σχήματος. Διατύπωσαν τη θεωρία των αναλογιών καθώς και τη θεωρία της αναλογίας των μουσικών διαστημάτων προς το μήκος μιας χορδής σταθερά τεντωμένης. Η Πυθαγόρεια αριθμητική περιλαμβάνει τη θεωρία των "πλευρικών", "διαμετρικών" και τέλειων αριθμών ήταν η πρώτη θεωρία που καθόρισε τους ασύμμετρους και τους ασύμφωνους αριθμούς.

## **ΣΟΥΜΕΡΙΟΙ**

Μαζί με τους Αιγυπτίους θεωρούνται οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν τους αριθμούς παράλληλα με τη γραφή. Αυτό έγινε πριν από 5 χιλιάδες χρόνια στη χώρα που ονομάζεται σήμερα Ιράκ. Η χώρα αυτή διασχίζεται από 2 μεγάλα ποτάμια, τον Τίγρη και τον Ευφράτη. Οι αριθμοί ήταν απαραίτητη για τη συγκεντρώση των φόρων που χρησιμοποιούνταν για το χτίσιμο πόλεων ναών και αρδευτικών συστημάτων. Αυτοί που κρατούσαν τα αρχεία ήταν οι ιερείς και ήταν αναγκαίο να χρησιμοποιούν σημάδια για να δείχνουν κάθε στιγμή την κατάσταση της φορολογίας. Μια από τις σημαντικότερες σειρές σημαδιών που έπρεπε να βρουν, ήταν οι αριθμοί. Για κάθε αριθμό θα μπορούσε να φτιαχτεί και ένα διαφορετικό σημάδι, αλλά υπάρχουν τόσοι πολλοί διαφορετικοί αριθμοί, που σημαίνει ότι θα έπρεπε να θυμάται κανείς χιλιάδες διαφορετικά σημάδια. Χαρακτηριστικό τους ήταν έγραφαν τους αριθμούς από τα δεξιά προς τα αριστερά.

Δυστυχώς δε σώζονται αρκετά δῆγματα αρίθμησης και δεν μπορούμε να έχουμε μια ολοκληρωμένη εικόνα. Φαίνεται να έδωσαν ιδιαίτερη σημασία στο εξήντα, λόγω του πλήθους των αριθμών με τους οποίους μπορεί να διαιρεθεί

## ΑΙΓΥΠΤΙΟΙ

Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι την αριθμητική την παρέβαλαν από τους Βαβυλώνιους. Δημιούργησαν 2 είδη γραφής, την αιγυπτιακή ιερογλυφική και την αιγυπτιακή ιερατική. Ήταν οι πρώτοι που παρίσταναν κάθε αριθμό με τον ίδιο κατακόρυφο σημάδι, που μοιάζει με δάκτυλο.

Έφτιαξαν το σημάδι I για να παραστήσουν το αριθμό ένα.

Είχαν έναν ορισμένο τρόπο για να γράφουν τα σύμβολα πχ για το πέντε δεν έγραφαν IIIII αλλά έγραφαν III και αμέσως από κάτω II. Ήταν πιο εύκολο να δει κανείς 3 σημάδια στη σειρά και έπειτα 2 ξέχωρα σημάδια, από το να διακρίνει 5 σημάδια στην ίδια σειρά. Κάτι παρόμοιο κάνουμε κι εμείς σήμερα για το πέντε. Επίσης για το δέκα χρησιμοποιούσαν ένα σύμβολο σαν ανάποδο u. Επίσης σκέφτηκαν ότι δε χρειάζεται να γραφεί ή να μετρηθεί περισσότερο από εννιά φορές ένα σύμβολο και έτσι επινόησαν ένα καινούριο σύμβολο για κάθε φορά που έπρεπε να γραφεί κάποιο σύμβολο 10 φορές. Έτσι χρησιμοποίησαν ένα σπείρα που μοιάζει λίγο με αυτό = 9.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι έδωσαν ιδιαίτερη σημασία στον αριθμό 10 και ότι για τους αριθμούς από το 1 μέχρι 999 δεν χρειαζόταν να θυμούνται παρά 3 σύμβολα. Επίσης έπρεπε να βρεθεί ένα καινούριο σύμβολο για το χίλια το 10 χιλιάδες κ. ο. κ

## ΡΩΜΑΙΟΙ

Πριν από 2 χιλιάδες χρόνια περίπου, μεγάλες περιοχές της Ευρώπης, της Ασίας και της Αφρικής εξουσιαζόταν από την Ρώμη. Σ' αυτήν την 'Ρωμαϊκή Αυτοκρατορία' χρησιμοποιήθηκε ένα σύστημα αρίθμησης βασισμένο στον αριθμό πέντε. Οι Ρωμαίοι χρησιμοποίησαν σύμβολο που είχαν που είχαν πάρει από το αλφάβητό τους. Για όλους σχεδόν τους λαούς της Ευρώπης και της Αμερικής που χρησιμοποιούν το Ρωμαϊκό αλφάβητο τα ρωμαϊκά σύμβολα είναι πολύ γνωστά.

Οι ρωμαίοι ξεκίνησαν το σύστημα τους συμβολίζοντας το αριθμό ένα με I. Για το δύο το τρία και το τέσσερα είχαν σύμβολο II, III, IIII. Μέχρι εδώ το σύστημα αυτό μοιάζει με το αιγυπτιακό σύστημα μόνο που οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν μόνο τέσσερα όμοια σύμβολα προτού φτιάξουν ένα καινούριο σύστημα. Αντί να γράφουν το 5 όπως οι Αιγύπτιοι IIIII, το έγραφαν V. Αντί να γράφουν το έξι σαν IIIII έγραφαν VI. Και για το εννέα έγραφαν VIII. Αν έγραφαν το δέκα VIIII, αυτό θα σήμαινε ότι χρησιμοποιήθηκαν 5 σύμβολα I και αυτό δεν επιτρεπόταν

Επειδή οι ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν ιδιαίτερα σύμβολα για το πέντε, το πενήντα και το πεντακόσια, δεν χρειαζόταν ποτέ να γράφουν περισσότερες

από 4 φορές οποιοδήποτε από τα σύμβολα για το ένα το 10 και το 100. Το 20 το έγραφαν XXII και το 73 LXXIII. Το 418 CCCCXVIII και το 1999 MDCCCCLXXXVIII

Αργότερα οι ρωμαίοι σκέφτηκαν με ένα ιδιαίτερο σύμβολο. Αφού τα σύμβολα γράφονταν πάντα από τα αριστερά προς τα δεξιά και από το μεγαλύτερο στο μικρότερο, γιατί καμία φορά να μην αντιστρέφεται η σειρά. Όταν βάζουμε το μικρότερο σύμβολο μετά το μεγαλύτερο, με το συνηθισμένο τρόπο, είναι σαν να προσθέτουμε τα 2 σύμβολα. Επομένως το VI είναι 'πέντε και ένα' δηλαδή έξι. Αν όμως βάζουμε το μικρότερο σύμβολο πριν από το μεγαλύτερο τότε το αφαιρούμε από το μεγαλύτερο. Έτσι το VI είναι 'πέντε μείον ένα' δηλαδή τέσσερα.

## ΑΡΑΒΕΣ

Γύρω στο 800 μ.π.χ. όχι πολύ αργότερα από τότε που ανακαλύφθηκε το σύμβολο για το 0, τα Ινδουιστικά ψηφία εξαπλώθηκαν στις χώρες βόρεια Αφρική καθώς και στην Ισπανία. Οι ινδουιστικοί αριθμοί εξαπλώθηκαν σόλο το τμήμα της Αφρικής και από εκεί στην Ισπανία.

Οι Άραβες ονόμαζαν το σύμβολο για το μηδέν 'σιφρ'. Οι Ευρωπαίοι ονόμασαν τα αριθμητικά σύμβολα του αραβικού συστήματος αραβικούς αριθμούς ή χαρακτήρες, γιατί είχαν προέλθει από αραβόφωνους λαούς. Οι Ευρωπαίοι, βέβαια δεν ήξεραν ότι η καταγωγή τους ήταν από την Ινδία. Οι Άραβες δεν επηρεάστηκαν μόνο από τους Ινδούς αλλά δέχτηκαν και την αρχαία ελληνική κληρονομία. Τέλος, είχαν ανακαλύψει μεθόδους για την απλοποίηση εξισώσεων.

Δηλαδή οι Άραβες δεν ανακάλυψαν ένα δικό τους σύστημα αρίθμησης, αλλά τελειοποίησαν αυτό των Ινδών.

## ΚΙΝΕΖΟΙ

Από την αρχή η κινεζική αριθμητική συσχετιζόταν με τα μαντεία. Οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται συνήθως σήμερα βρέθηκαν επάνω σε μαντικά οστά και θυρεούς χελώνας χρονολογούμενα από την περίοδο του Σαγκ καθώς και επάνω σε ορειχάλκινα αντικείμενα και νομίσματα της περιόδου Τσου. Δεν υπήρχε το 0, το οποίο δεν χρησιμοποιήθηκε πριν από τον 15<sup>ο</sup> αιώνα π.χ. Χρησιμοποιούσαν αυστηρή δεκαδική σημειογραφία, πράγμα που καθιστά το κινεζικό αριθμητικό σύστημα τελείως ανεξάρτητο από εκείνο που χρησιμοποιήθηκε στη Μεσοποταμία. Είχαν υπολογίσει το π με πολύ υψηλό αριθμό ακρίβειας δίνοντας του ανώτερες και κατώτερες τιμές όπως 3,1414927 και 3,1414926

## ΕΥΡΩΠΑΙΟΙ

Οι Ευρωπαίοι αρκούσαν λίγο-πολύ στην αφομοίωση αρχαίας κληρονομιάς, εμπλουτισμένης από τους Ινδούς και τους Άραβες. Το μεγάλο γεγονός ήταν η εισαγωγή των ονομαζόμενων <<αραβικών>> αριθμών.

Οι τεχνικές του υπολογισμού, γνωστές τότε ως <<λογιστική>>, παρέμεναν υποτυπώδεις. Ο Φιμπονάτσι παραμένει ακόμη τρέχουσα διαδικασία μας για την αφαίρεση. Ο πολλαπλασιασμός αντιμετωπιζόταν σαν σειρά πράξεων πρόσθεσης και ο διπλασιασμός άλλη μια χωριστή πράξη. Οι διαδικασίες της διαίρεσης αποτελούσαν πηγή ιδιαίτερης σύγχυσης, ο Γερβέτος παραθέτει ούτε λίγες ούτε πολλές δέκα τέτοιες διαδικασίες και προσφεύγει κατά κύριο λόγο σε μια σειρά από αφαιρέσεις. Ο Φιμπονάτσι πάντως μπόρεσε να περιγράψει με λεπτομέρειες μεθόδους για την εξαγωγή τετραγωνικών και κυβικών ριζών.

Αλλά η έννοια των άπειρων ποσοτήτων, που απέρριψε ο Αριστοτέλης αλλά αναγνώρισε ο Χριστιανισμός, έβαλε μερικές διάνοιες στον δρόμο προς τον διαφορικό και τον ολοκληρωτικό λογισμό. Δυστυχώς, η δουλειά που έγινε πάνω στη μαθηματική απειρία γύρω στα 1300 από σοφούς στο Παρίσι ξεχάστηκε στον δέκατο πέμπτο αιώνα ώσπου ο Φέρμα και ο Καβαλιέρο τους επεξεργάστηκαν από την αρχή.

## BABYΛΩΝΙΟΙ

Το εξηναδικό σύστημα χρησιμοποιήθηκε και από τους Βαβυλώνιους το 2000 έως το 500 π.χ. Οι Βαβυλώνιοι γνώρισαν τις 4 πράξεις τις ρίζες και έδιναν εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού. Το αριθμητικό τους σύστημα έχει ως βάση το 60. Η υιοθέτηση μιας τέτοιας μεγάλης και δύσχρηστης βάσης, ίσως εξηγείται από το γεγονός εκείνες τις εποχές. Χρήση αριθμών δεν έκανε ο ευρύς πληθυσμός τις χώρες αλλά μόνο μια μικρή τάξη επαγγελματιών, οι Τράφτις. Το αριθμητικό τους σύστημα ήταν επαναληπτικό και όχι ψηφιακό, αφού οι μονάδες του παριστάνονταν με επανάληψη του ίδιου συμβόλου και όχι με διαφορετικά σύμβολα. Χρησιμοποιούσαν μόνο δύο την <<σφήνα>> και το <<καρφί>> αν ήθελαν π.χ να συμβολίσουν τον αριθμό 5 έγραφαν ισάριθμες σφήνες. Επίσης, ήταν θεσιακό που σημαίνει ότι η αξία κάθε αριθμού καθορίζεται από τη θέση του μέσα στον αριθμό. Τέλος δεν είχαν σύμβολο για το μηδέν και για την υποδιαστολή. Μια εφαρμογή του εξηναδικού συστήματος σήμερα είναι στην καταμέτρηση του χρόνου όπου η ώρα έχει 60 λεπτά και το λεπτό 60 δευτερόλεπτα.

## ΙΝΔΟΙ

Οι Ινδουιστές στην Ινδία δημιούργησαν ένα τέτοιο σύνολο από σύμβολα για τους αριθμούς, που το χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα. Οι μορφές των συμβόλων που χρησιμοποιούμε σήμερα δεν είναι ακριβώς ίδιες με αυτές που

χρησιμοποιούσαν οι Ινδουιστές πριν από πολλούς αιώνες. Παρόλα αυτά, αν παρατηρήσουμε τους Ινδουιστικούς αριθμούς, μπορούμε να δούμε σε αυτούς τις πρώτες αρχές των αριθμητικών συμβόλων που χρησιμοποιούμε και σήμερα. Από τους Ινδουιστές μαθαίνουμε τα εξής: 1=ένα, 2=δύο, 3=τρία, 4=τέσσερα, 5=πέντε, 6=έξι, 7=επτά, 8=οχτώ, 9=εννιά. Οι αριθμοί εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην Ινδία πριν από 2200 χρόνια περίπου. Τα ψηφία 1,2,3 από πολλούς αποκαλούνται <<αραβικοί αριθμοί>>. Τα επινόησαν όμως αυτοί που είχαν αποφασιστικά στραμμένο το πνεύμα τους στις εφαρμογές στους μεγάλους αριθμούς και τον αριθμητικό λογισμό, οι Ινδοί. Το μηδέν έχει ακόμα μορφή ενός μικρού κύκλου ομοίου με το γράμμα(0) είναι ακριβώς αυτή ενός μικρού κύκλου που το έλεγαν <<σούνια>> που σημαίνει τίποτα. Επίσης δεν είχαν την απαιτούμενη γνώση κάποιου συστήματος θέσης. Γύρω στο 500μ.χ την εποχή που ζούσε ο μαθηματικός Αριαμπάτα αναπτύχθηκε ένα νέο σύστημα θέσης με 10 σύμβολα όπου το ένα από αυτά είναι για το μηδέν. Άλλοι θεωρούν ότι η χρήση αυτού του συστήματος, γενικεύτηκε ύστερα από το 700μ.χ. Είναι γεγονός ότι αρκετά χρόνια πριν οι Ινδοί είχαν έρθει σε επαφή με τον ελληνικό πολιτισμό και ακόμη ήταν ενημερωμένοι για το έργο του Αστρονόμου Πτολεμαίου. Ο Πτολεμαίος μάλιστα κατά τους υπολογισμούς του με εξηκονταδικά κλάσματα χρησιμοποίησε το σύμβολο <<0>> για το μηδέν.

Για την αναπαράσταση ενός αριθμού επαναλαμβάνονταν τα σύμβολα αυτά όσες φορές χρειαζόταν δηλαδή κάτι ανάλογο με το σύστημα αρίθμησης των Ρωμαίων. Στη γραφή αυτή οι αριθμοί γράφονταν από τα δεξιά προς τα αριστερά δηλαδή το μικρότερο στοιχείο βρισκόταν στο αριστερό μέρος του αριθμού. Δεν υπάρχει κάποιο σύμβολο για το μηδέν.

Τέλος η εξέλιξη των σημερινών συμβόλων πραγματοποιήθηκε με τη συνειδητοποίηση του συστήματος θέσης, δηλαδή τα ίδια σύμβολα που χρησιμοποιούμε για τους εννιά πρώτους αριθμούς, να χρησιμοποιούνται και για τα αντίστοιχα πολλαπλάσια οποιασδήποτε δύναμης του δέκα.

#### ΙΝΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Εκ- 1  
Ντας- 10  
Σαου-100  
Χαζαρ- 1.000  
Λακχ- 100.000  
Κρορε- 1.000.000  
Αραβμπ-10.000.000  
Χαραβμπ- 100.000.000.000  
Παντμα- 1.000.000.000.000.000  
Σακχ- 100.000.000.000.000.000  
Μαχασανκχ- 10.000.000.000.000.000.000



## ΠΡΑΞΕΙΣ-ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ

### Δεκαδικό Σύστημα

Το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης ποσοτήτων σε ακολουθίες συμβόλων. Τα σύμβολα που είναι διαθέσιμα στο δεκαδικό σύστημα είναι δέκα. (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 και 9)

Για να βρούμε την αναπαράσταση στο δεκαδικό σύστημα μιας ποσότητας ακολουθούμε κάποια από τα παρακάτω βήματα :

α) Ομαδοποιούμε τις μονάδες αντικειμένων σε δεκάδες (μια δεκάδα είναι 10 μονάδες).

β) Αν περισσέψουν κάποιες μονάδες οι οποίες δεν φτάνουν για να φτιάξουν μια δεκάδα, τότε το πλήθος τους είναι το πλήθος των μονάδων του αριθμού σε δεκαδική αναπαράσταση.

γ) Γράφουμε το αντίστοιχο σύμβολο στη θέση του αριθμού για τις μονάδες.

δ) Ομαδοποιούμε τις δεκάδες που φτιάχτηκαν σε εκατοντάδες (μια εκατοντάδα είναι 10 δεκάδες).

ε) Αν περισσέψουν κάποιες δεκάδες που δεν φτάνουν για να φτιάξουμε εκατοντάδα, τότε το πλήθος τους είναι το πλήθος των δεκάδων του αριθμού σε δεκαδική αναπαράσταση.

στ) Γράφουμε το αντίστοιχο σύμβολο στη θέση του αριθμού για τις δεκάδες, δηλαδή μια θέση αριστερά από το σύμβολο που βάλαμε για τις μονάδες.

Το σύστημα αυτό έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Είναι σύστημα θέσης και δέκα μονάδες μιας τάξης δίνουν μια μονάδα της αμέσως ανώτερης τάξης.
- Έχει ειδικό σύμβολο για το μηδέν και ξεχωριστό σύμβολο για κάθε αριθμό μικρότερο από τη βάση. Τα σύμβολά του είναι: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 και 9.
- Τα σύμβολα αυτά είναι πολύ απλά εύχρηστα καθώς μπορούν να σχεδιαστούν εύκολα ακόμα και από μικρά ψηφίδια και μπορούν να συνδυαστούν για να συμβολίσουν οποιονδήποτε αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο.
- Οι πράξεις γίνονται αρκετά εύκολα με τη χρησιμοποίηση αυτών των συμβόλων.
- Ο αριθμός 10, που είναι βάση του συστήματος είναι εύκολος στη γραφή και οι δυνάμεις του οι οποίες αποτελούν τις μονάδες των τάξεων του συστήματος, μπορούν να υπολογιστούν εύκολα. Η βάση 10 είναι περισσότερο λειτουργική από άλλες πολύ μικρές βάσεις.

Για να μετατρέψουμε οποιοδήποτε άλλο σύστημα σε δεκαδικό πολλαπλασιάζουμε το κάθε ψηφίο του αριθμού με τον αριθμό  $X$  της βάσης του (10, 2, 8, 16) υψωμένη σε μια δύναμη  $Y$ . Οπού  $Y$  είναι η θέση του αντίστοιχου ψηφίου του αριθμού (0, 1, 2, 3, 4,.....). Τέλος προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν και έχουμε τον επιθυμητό δεκαδικό αριθμό.

### Δυαδικό σύστημα

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης αναπαριστά αριθμητικές τιμές χρησιμοποιώντας δύο σύμβολα, το 0 και το 1. Πιο συγκεκριμένα, το δυαδικό είναι ένα θεσιακό σύστημα με βάση το 2. Κάθε ψηφίο ανήκει σε μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη κατά ένα από αυτήν του ψηφίου στα δεξιά του. Έτσι, κάθε ψηφίο ενός δυαδικού αριθμού από δεξιά προς τα αριστερά δηλώνει μονάδες, δυάδες, τετράδες κ.ο.κ.

Ονομάζεται δυαδικό επειδή η αναπαράσταση της πληροφορίας γίνεται με χρήση δύο συμβόλων.

Πρόσθεση δυαδικών αριθμών

Για την πρόσθεση των δυαδικών αριθμών ισχύουν οι ακόλουθοι κανόνες :

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 0 \text{ και } 1 \text{ το κρατούμενο}$$

$$1 + 1 + 1 = 1 \text{ και } 1 \text{ το κρατούμενο}$$

Έτσι για παράδειγμα, για να προσθέσουμε σε μορφή ψηφιολέξης (byte) τους αριθμούς 121 και 107 έχουμε :

$$(121) \ 01111001$$

$$(107) \ 01101011 \ +$$

$$(228) \ 11100100$$

Όπου η πρόσθεση αρχίζει όπως και στο δεκαδικό από τα δεξιά, δηλαδή από την λιγότερο σημαντική θέση.

Δυαδικό σύστημα στους υπολογιστές

Η αποθήκευση και επεξεργασία των δεδομένων στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές γίνεται ψηφιακά. Οδηγώντας, για παράδειγμα, την είσοδο ενός λογικού κυκλώματος με τάση ρεύματος μεγαλύτερη μιας συγκεκριμένης τιμής (π.χ. +3 Volts ) αναπαριστούμε το ψηφίο "1", ενώ οδηγώντας την είσοδο με τάση ρεύματος μικρότερη μιας συγκεκριμένης τιμής (π.χ. +2 Volts ) αναπαριστούμε το ψηφίο "0". Λόγω της σχετικά απλής υλοποίησης στα ηλεκτρονικά κυκλώματα το δυαδικό σύστημα χρησιμοποιείται εκτεταμένα στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές για την αναπαράσταση αριθμητικών δεδομένων. Άλλα χρησιμοποιούμενα συστήματα είναι το σύστημα κινητής υποδιαστολής, το σύστημα σταθερής υποδιαστολής, η δυαδική κωδικοποίηση δεκαδικού, και άλλα.

Το δυαδικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιείται στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές διότι ο υπολογιστής δεν μπορεί να <<δει>> ψηφία αλλά αναγνωρίζει δυαδικές καταστάσεις:

⊠ Διέλευση ή μη ηλεκτρικού ρεύματος

⊠ Χαμηλή ή υψηλή ένταση ηλεκτρικού ρεύματος

⊠ Χαμηλό ή υψηλό ηλεκτρικό δυναμικό

που τις αντιστοιχούμε στα ψηφία 0 και 1

ΤΡΙΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Είναι ένα σύστημα αρίθμησης που έχει ως βάση το 3. Αν και το τριαδικό σύστημα συχνότερα αναφέρεται σε ένα σύστημα στο οποίο τα τρία ψηφία 0,1 και 2 είναι όλοι οι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί το οποίο δανείζει επίσης το όνομά του στο ισορροπημένο τριαδικό σύστημα που χρησιμοποιείται στη λογική σύγκρισης και στους τριαδικούς υπολογιστές.

ΟΚΤΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Έχει σαν βάση το 8 και χρησιμοποιεί τους αριθμούς 0,1,2,3,4,5,6

και 7. Το Οκταδικό σύστημα παρουσιάζει μια απλή σχέση με το δυαδικό καθώς η βάση του είναι το 2 ( $2^3=8$ ). Για αυτό το λόγο είναι πολύ εύκολη η μετατροπή από το Οκταδικό στο δυαδικό σύστημα και το αντίθετο.

ΔΕΚΑΕΞΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Έχει ως βάση το 16 και τα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 και A,B,C,D,E,F. Στο δεκαεξαδικό σύστημα για να βρούμε την τιμή ενός ψηφίου το πολλαπλασιάζουμε με την κατάλληλη δύναμη το 16. Οι δεκαεξαδικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται ευρύτατα στην Πληροφορική, όπως για παράδειγμα στην αρίθμηση των διευθύνσεων μνήμης των ηλεκτρονικών υπολογιστών ή στον προγραμματισμό των μικροϋπολογιστών σε γλώσσα μηχανής. Επομένως, είναι χρήσιμη η γνώση της εκτέλεσης των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης δεκαεξαδικών αριθμών.

Το άθροισμα δύο δεκαεξαδικών αριθμών υπολογίζεται με την ακόλουθη διαδικασία: Η πρόσθεση ξεκινάει από τα LSD προς τα MSD των προσθετέων. Τα ψηφία των δεκαεξαδικών αριθμών προστίθενται σε κάθε θέση, όπως προστίθενται οι δεκαδικοί αριθμοί.

- Αν το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από 15 ή ίσο με 15, τότε το άθροισμα είναι το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο.
- Αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο από 15, τότε το άθροισμα είναι το δεκαεξαδικό ψηφίο που αντιστοιχεί στην διαφορά του αποτελέσματος μείον 16 και μεταφέρεται κρατούμενο 1 στην επόμενη θέση.

Για παράδειγμα, παρουσιάζεται η δεκαεξαδική πρόσθεση:

$$(EB98)_{16} + (4F31)_{16} = (13AC9)_{16}$$

					1
		E	B	9	8
	+	4	F	3	1
		1	3	A	C
					9

Η αφαίρεση ξεκινάει από τα LSD προς τα MSD του μειωτέου και του αφαιρετέου.

- Αν σε κάθε θέση το ψηφίο του μειωτέου είναι μεγαλύτερο από ή ίσο με το ψηφίο του αφαιρετέου, τότε τα ψηφία των δεκαεξαδικών αριθμών αφαιρούνται, όπως αφαιρούνται οι δεκαδικοί αριθμοί. Η διαφορά είναι το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο.
- Αν σε κάθε θέση το ψηφίο του μειωτέου είναι μικρότερο από το ψηφίο του αφαιρετέου, τότε μεταφέρεται δανεικό 1 από την επόμενη θέση (το δεκαεξαδικό ψηφίο της επόμενης θέσης μειώνεται κατά 1). Στο ψηφίο του μειωτέου προστίθεται το 16 και από αυτό το άθροισμα αφαιρείται το ψηφίο του αφαιρετέου. Η διαφορά είναι το αντίστοιχο δεκαεξαδικό ψηφίο του αποτελέσματος αυτής της αφαίρεσης.

Για παράδειγμα, παρουσιάζεται η δεκαεξαδική αφαίρεση:

$$(62C8)_{16} - (2E13)_{16} = (34B5)_{16}$$

5	18			
	6	2	C	8
-	2	E	1	3
	3	4	B	5

ΑΡΜΕΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Είναι ένα ιστορικό αριθμητικό σύστημα που δημιουργήθηκε χρησιμοποιώντας τα κεφαλαία γράμματα του Αρμένικου αλφαβήτου. Δεν υπήρχε σύμβολο για το μηδέν στο παλιό σύστημα και οι αριθμητικές αξίες των γραμμάτων προτίθενται για να εξαχθεί ο τελικός αριθμός. Στη σύγχρονη Αρμενία χρησιμοποιούνται οι γνωστοί/αραβικοί αριθμοί. Οι αρχές που διέπουν αυτό το σύστημα είναι οι ίδιες με του ελληνικού συστήματος αρίθμησης και του εβραϊκού συστήματος αρίθμησης.

ΑΡΧΑΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Τα αριθμητικά σύμβολα τα οποία χρησιμοποιούμε από την Α' Δημοτικού για να φτιάξουμε τους αριθμούς και να κάνουμε τις πράξεις κρύβουν μέσα τους μια ιστορία χιλιάδων αιώνων. Όλοι οι αρχαίοι λαοί χρησιμοποιούσαν μαθηματικά σύμβολα για να απεικονίσουν αριθμούς και να λύσουν με αυτά τα καθημερινά προβλήματα υπολογισμών. Οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε σήμερα προέρχονται από τους Άραβες οι οποίοι τους εξέλιξαν αφού τους πήραν από τους Ινδούς.

ΕΠΤΑΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ: έχει ως βάση το 7 και χρησιμοποιεί τα ψηφία 0,1,2,3,4,5,6

ΑΚΡΟΦΩΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ: είναι ένα αρχαίο ελληνικό σύστημα. Όρος ακροφωνικό σημαίνει ότι τα σύμβολα των αριθμών εκτός από αυτό του ενα, προέρχονται από το πρώτο γράμμα του ονόματος του αριθμού.

ΘΕΣΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ: ονομάζεται το σύστημα αρίθμησης στο οποίο οι αριθμοί παριστάνονται με ορισμένα σύμβολα η συνδυασμούς τους και η αξία των αριθμών αυτών υπολογίζεται με βάση:

A (τις αξίες των συμβόλων)

B (τη θέση των συμβόλων)

ΙΝΔΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ: το παραδοσιακό ινδικό σύστημα αρίθμησης βασίζεται σε ομαδοποίηση εκατοντάδων αντί για χιλιάδων στο σύστημα αρίθμησης που χρησιμοποιείται.

## ΜΕΙΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ/ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ

Το δεκαδικό σύστημα έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Είναι σύστημα θέσης και δέκα μονάδες μιας τάξης δίνουν μια μονάδα της αμέσως ανώτερης τάξης.
- Έχει ειδικό σύμβολο για το μηδέν και ξεχωριστό σύμβολο για κάθε αριθμό μικρότερο από τη βάση. Τα σύμβολά του είναι: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 και 9.
- Τα σύμβολα αυτά είναι πολύ απλά εύχρηστα καθώς μπορούν να σχεδιαστούν εύκολα ακόμα και από μικρά ψηφίδια και μπορούν να συνδυαστούν για να συμβολίσουν οποιοδήποτε αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο.
- Οι πράξεις γίνονται αρκετά εύκολα με τη χρησιμοποίηση αυτών των συμβόλων.
- Ο αριθμός 10, που είναι βάση του συστήματος είναι εύκολος στη γραφή και οι δυνάμεις του οι οποίες αποτελούν τις μονάδες των τάξεων του συστήματος, μπορούν να υπολογιστούν εύκολα. Η βάση 10 είναι περισσότερο λειτουργική από άλλες πολύ μικρές βάσεις.

Το δυαδικό σύστημα έχει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Η αποθήκευση είναι πάρα πολύ εύκολη (δύο καταστάσεις 0 και 1)
- Η επεξεργασία ήταν πιο απλή σε σχέση με το δεκαδικό σύστημα

και μειονέκτημα:

- Το μεγαλύτερο πλήθος ψηφίων για την παράσταση δεδομένου αριθμού.

## Βιβλιογραφία

- [http://en.wikipedia.org/wiki/Arabic\\_numbers](http://en.wikipedia.org/wiki/Arabic_numbers)
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Greek\\_numerals](http://en.wikipedia.org/wiki/Greek_numerals)
- <http://www.geocities.com/rmlyra/Numbers.html>
- <http://www2.ignatius.edu/faculty/turner/arabic/anumbers.htm>
- [http://utopia.duth.gr/~ksiop/lessons/plhroforikh\\_i.html](http://utopia.duth.gr/~ksiop/lessons/plhroforikh_i.html)
- [http://www.survey.ntua.gr/main/courses/general/csinro/lectures/IntroCS\\_2005\\_lecture\\_1.pdf](http://www.survey.ntua.gr/main/courses/general/csinro/lectures/IntroCS_2005_lecture_1.pdf)
- [http://www.cs.uoi.gr/~kabousia/pdf/LogicDesign/Th1\\_BinarySystems.pdf](http://www.cs.uoi.gr/~kabousia/pdf/LogicDesign/Th1_BinarySystems.pdf)
- <http://www.cs.uoi.gr/~lagaris/ITC/PowerPoint/SystimataArithmisis.ppt>
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Cyrillic\\_numerals](http://en.wikipedia.org/wiki/Cyrillic_numerals)
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Roman\\_numerals](http://en.wikipedia.org/wiki/Roman_numerals)
- <http://blogs.sch.gr/manolas/2008/09/25/%CF%83%CF%85%CF%83%CF%84%CE%AE%CE%BC%CE%B1%CF%84%CE%B1-%CE%B1%CF%81%CE%AF%CE%B8%CE%BC%CE%B7%CF%83%CE%B7%CF%82/>