3^o ΓΕΛ Κομοτηνής
9^η συνάντηση

Κυριακή 12/3/2017

http://eclass.sch.gr/courses/EL1228140/

Έβαλα στον νου μου δύο διαδοχικούς θετικούς φυσικούς αριθμούς (όπως το 6 και το 7, αλλά όχι απαραίτητα αυτούς). Είπα στην Κατερίνα τον έναν από τους δύο αριθμούς και στον Ανδρέα τον άλλον. Ο καθένας ξέρει τον δικό του αριθμό, αλλά όχι του άλλου και ξέρει ότι οι δύο αριθμοί είναι διαδοχικοί θετικοί φυσικοί αριθμοί.

Μετά ένας περαστικός άκουσε τον εξής διάλογο:

Κατερίνα προς Ανδρέα: ***Χμμ, δεν μπορώ να είμαι απόλυτα σίγουρη για τον αριθμό που έχεις.***

Ανδρέας προς Κατερίνα: ***Ούτε εγώ είμαι απόλυτα σίγουρος.***

Κατερίνα προς Ανδρέα: ***Ωραία, τώρα που το λες αυτό, είμαι απόλυτα σίγουρη για τον αριθμό που έχεις και ξέρω ότι είναι διαιρέτης του 20.***

Ποιος είναι ο αριθμός της Κατερίνας;

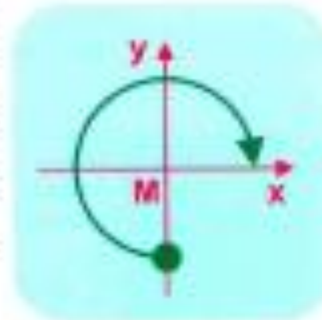
Α) 2 Β) 3 Γ) 4 Δ) 5 Ε) 6

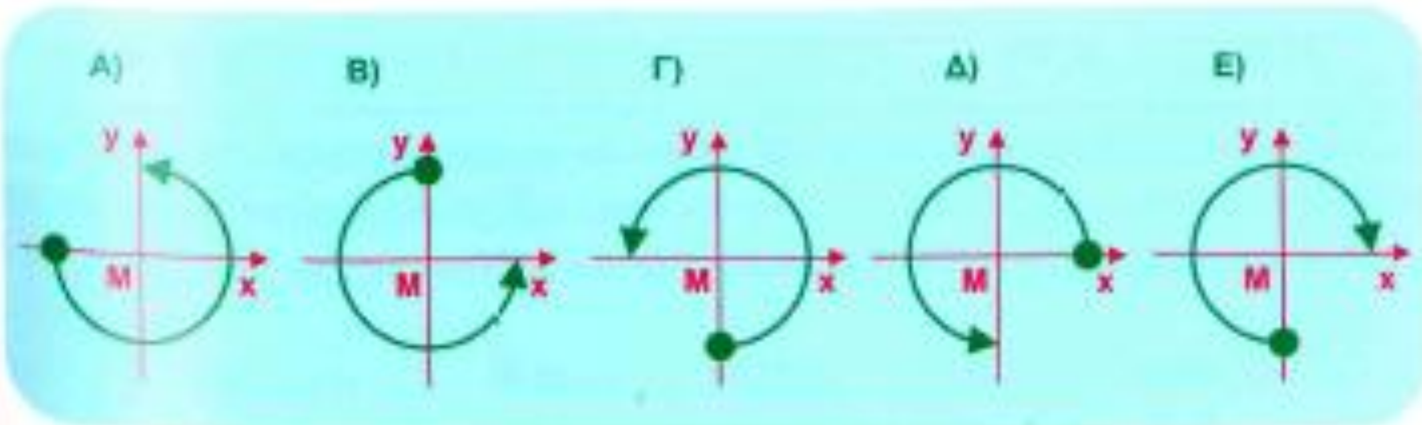
13) Πόσοι φυσικοί αριθμοί N υπάρχουν έτσι ώστε οι $\frac{N}{3}$ και 3N να είναι και οι δύο τριψήφιοι αριθμοί;

Αφού ο N/3 πρέπει να είναι ακέραιος πρέπει πρώτα από όλα ο N να είναι πολλαπλάσιο του 3. Έστω N=3k. Αφού οι τριψήφιοι είναι ακριβώς οι αριθμοί 100, 101, ... , 998, 999 , οι δύο υποθέσεις γράφονται $100 \le \frac{N}{3} \le 999$ και $100 \le 3N \le 999$, από τε $100 \le k \le 999$ και $100 \le 9k \le 999$, αντίστοιχα. Από αυτές η δεύτερη απλοποιείται στην $11+\frac{1}{9} \le k \le 111$. Συγκρίνοντας διαπιστώνουμε ότι οι κοινές λύσεις είναι ακριβώς οι 12 τιμές k = 100, 101, 102, ... , 111. Τα αντίστοιχα N είναι τα N=3k = 300, 303, 306, ... , 333.

Επίπεδο 5: Γρίφος 13/ 2010

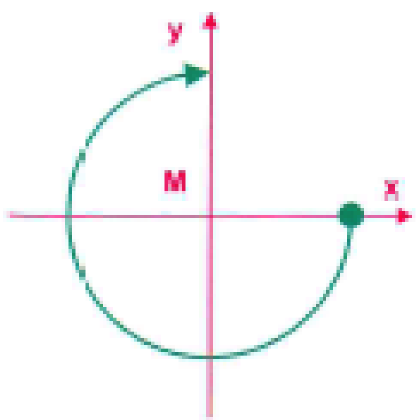
9) Στο πίνακα είναι σχεδιασμένο ένα τόξο ενός κύκλου με κέντρο Μ. Στο τόξο είναι ζωγραφισμένο ένα βελάκι, όπως δείχνει το σχήμα δεξιά. Ο Ευκλείδης πρώτα έστριψε το τόξο γύρω από το Μ κατά γωνία 90° με φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού. Του σχήματος που προέκυψε πήρε το συμμετρικό ως προς τον άξονα των x. Ποιο από τα παρακάτω είναι η τελική θέση του τόξου;

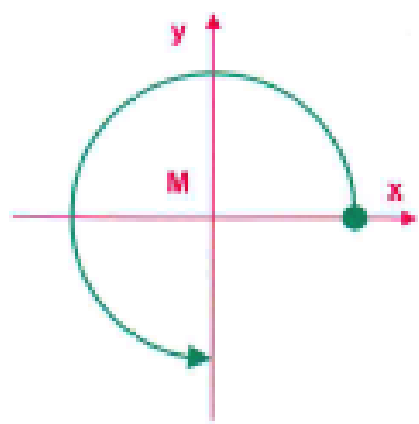




9) Δ)

Η στροφή γύρω από το Μ κατά γωνία 90° με φορά αντίθετη από τους δείκτες του ρολογιού θα φέρει το σχήμα στη θέση που δείχνει η εικόνα αριστερά. Αυτού του σχήματος η ανάκλαση ως προς τον άξονα των x θα το φέρει στη θέση της εικόνας δεξιά.





Επίπεδο 4: Γρίφος 9/ 2013

23) Έστω Τ το πλήθος των τελείων τετραγώνων από το 1 μέχρι και το 2013^6, και έστω Κ το πλήθος των τελείων κύβων από το 1 μέχρι και το 2013^6. Τότε ισχύει

Α) $T = K$ Β) $2T = 3K$ Γ) $3T = 2K$ Δ) $T = 2013K$ Ε) $T^3 = K^2$

Τα τέλεια τετράγωνα μέχρι έναν αριθμό N^2 είναι οι αριθμοί $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, N^2$, οι οποίοι είναι N το πλήθος. Ειδικά μέχρι τον $2013^6 = (2013^3)^2$ υπάρχουν 2013^3 τέλεια τετράγωνα, οπότε $T = 2013^3$. Τα τέλειοι κύβοι μέχρι έναν αριθμό N^3 είναι οι αριθμοί $1^3, 2^3, 3^3, \ldots, N^3$, οι οποίοι είναι N το πλήθος. Ειδικά μέχρι τον $2013^6 = (2013^2)^3$ υπάρχουν 2013^2 τέλειοι κύβοι, οπότε $K = 2013^2$. Από τις δοθείσες σχέσεις στο πρόβλημα, η μόνη που ισχύει είναι η $T = 2013K$, οπότε η σωστή απάντηση είναι η (Δ).

19) Στο πίνακα είναι γραμμένος ένας εξαψήφιος φυσικός αριθμός. Το γινόμενο των ψηφίων του είναι περιττός αριθμός. Ποιο από τα παρακάτω αληθεύει;

A) Είτε δύο ή τέσσερα ψηφία του αριθμού είναι άρτια.

B) Δεν υπάρχει τέτοιος εξαψήφιος.

Γ) Το πλήθος των περιττών ψηφίων του αριθμού είναι περιττό.

Δ) Υπάρχει περίπτωση ο αριθμός να αποτελείται από έξι διαφορετικά ψηφία.

Ε) Κανένα από τα προηγούμενα.

19) Ε) Κανένα από τα προηγούμενα.

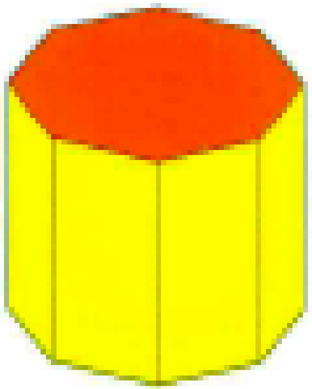
Αφού το γινόμενο των ψηφίων είναι περιττός αριθμός, σημαίνει ότι όλα τα ψηφία (και τα έξι) του αρχικού αριθμού είναι περιττοί αριθμοί (αν κάποιο ήταν άρτιος, τότε το γινόμενό τους θα ήταν άρτιος αριθμός). Άμεση συνέπεια είναι ότι τα (Α) και (Γ) είναι ψευδή. Το (Β) είναι επίσης ψευδές καθώς υπάρχουν παραδείγματα εξαψήφιων με την δοσμένη ιδιότητα. Οι 111111, 113579 και πολλοί άλλοι είναι τέτοιες περιπτώσεις. Πιο ενδιαφέρον είναι να δούμε γιατί είναι ψευδές το (Δ): Τα περιττά ψηφία είναι πέντε τον αριθμό, τα 1, 3, 5, 7 και 9. Άρα ο εξαψήφιος αποκλείεται να αποτελείται από διαφορετικά ψηφία, αφού οι 1, 3, 5, 7, 9 δεν επαρκούν για να φτιάξουν εξαψήφιο με διαφορετικά ψηφία. Άρα η μόνη απάντηση που αληθεύει είναι η (Ε).

Επίπεδο 4: Γρίφος 19/ 2013

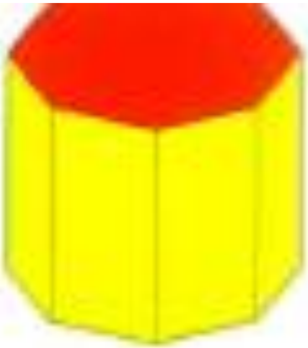
Στο 13^{ο} Δημοτικό Σχολείο Κομοτηνής ζυγίστηκαν 8 μαθητές, οι οποίοι βρέθηκαν να έχουν τα εξής βάρη: 21, 26, 39, 42, 48, 51, 63, 72. Μόλις ο μικρός Θωμάς άκουσε τη δασκάλα του, την κυρία Ευτέρπη να ανακοινώνει τα βάρη των 8 μαθητών είπε: «Δεν μπορούν οι μαθητές να χωριστούν σε δύο ομάδες που να ζυγίζουν το ίδιο». Αληθεύει ο ισχυρισμός αυτός.

Παρατηρούμε ότι όλοι οι αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 3 με εξαίρεση το 26.
Έτσι, το άθροισμα όσων αριθμών και να πάρουμε που είναι πολλαπλάσια του 3 θα δίνει αποτέλεσμα πολλαπλάσιο του 3.
Αντίθετα σε όποιο από τα αθροίσματα συμπεριλάβουμε το 26, το άθροισμα αυτό δεν θα είναι πολλαπλάσιο του 3.
Άρα οι μαθητές **δεν** μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες που να ζυγίζουν το ίδιο.

3) Ένα πρίσμα έχει συνολικά 2013 έδρες. Πόσες ακμές έχει το πρίσμα αυτό; (Στην εικόνα φαίνεται ένα πρίσμα που δεν είναι της ερώτησης.)



Αφού το πρίσμα έχει 2013 έδρες από τις οποίες οι δύο είναι βάσεις, οι υπόλοιπες 2011 είναι στο πλάι. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι οι βάσεις είναι πολύγωνα με 2011 πλευρές το καθένα. Οι ακμές του σχήματος είναι α) 2011 στη κάτω βάση, β) 2011 στη πάνω βάση και γ) 2011 στο πλάι. Σύνολο 6033.



Επίπεδο 5: Γρίφος 3/ 2013