Οι αριθμοί στην πορεία του χρόνου

Προϊστορία Των Μαθηματικών

Η προέλευση της μαθηματικής σκέψης βασίζεται στις έννοιες του αριθμού, του μεγέθους και του σχήματος. Σύγχρονες μελέτες της γνωστικής λειτουργίας των ζώων, έχουν δείξει ότι οι έννοιες αυτές δεν αφορούν μόνο το ανθρώπινο ον. Τέτοιες έννοιες θα ήταν μέρος της καθημερινής ζωής και σε προϊστορικές κοινωνίες κυνηγών-τροφοσυλλεκτών. Η ιδέα του "αριθμού" σαν έννοια, που εξελίσσεται σταδιακά με την πάροδο του χρόνου, υποστηρίζεται από την ύπαρξη άλλων γλωσσών, οι οποίες διατηρούν τη διάκριση μεταξύ των εννοιών "ένα", "δύο" και "πολλά", αλλά όχι αριθμών μεγαλύτερων του δύο.

Το αρχαιότερο γνωστό, ενδεχομένως μαθηματικό, αντικείμενο είναι τα οστά Lebombo, που βρέθηκαν στην οροσειρά Lebombo της Σουαζιλάνδης και χρονολογούνται γύρω στο 35000 π.Χ.. Αποτελείται από 29 εμφανείς εγκοπές πάνω σε περόνη μπαμπουίνου. Άλλα προϊστορικά αντικείμενα, που ανακαλύφθηκαν στην Αφρική και τη Γαλλία, τα οποία χρονολογούνται μεταξύ 35000-20000 π.Χ., υποδηλώνουν τις πρώτες απόπειρες να προσδιοριστεί ποσοτικά ο χρόνος.

Το οστό Ishango, το οποίο βρέθηκε στις πηγές του ποταμού Νείλου (στο βορειοανατολικό Κονγκό), χρονολογείται έως και 20000 ετών και αποτελείται από ένα πλήθος ψηλών γραμμάτων σκαλισμένα σε τρεις στήλες, που διατρέχουν το μήκος του οστού. Συνήθεις ερμηνείες είναι ότι το οστό Ishango δείχνει είτε την αρχαιότερη γνωστή επίδειξη των ακολουθιών των πρώτων αριθμών, είτε ένα εξαμηνιαίο σεληνιακό ημερολόγιο. Στο βιβλίο *HowMathematicsHappened: TheFirst 50,000 Years*, ο PeterRudman υποστηρίζει ότι η ανάπτυξη της έννοιας των πρώτων αριθμών θα μπορούσε μόνο να έχει έρθει σχετικά μετά την

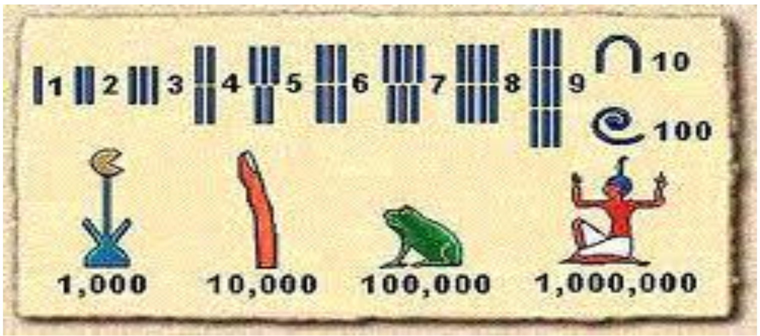
έννοια της διαίρεσης, πράγμα το οποίο χρονολογείται μετά το 10000 π.Χ., με τους πρώτους αριθμούς πιθανότατα να μην έχουν γίνει κατανοητοί μέχρι περίπου το 500 π.Χ.. Γράφει επίσης ότι: "δεν έχει γίνει καμία προσπάθεια να εξηγηθεί γιατί μία αντιστοιχία από κάτι που πρέπει να εμφανίζει πολλαπλάσια του 2, πρώτους αριθμούς από το 10 έως το 20, και κάποιους αριθμούς που σχεδόν είναι πολλαπλάσια του 10". Το οστό Ishango σύμφωνα με τον μελετητή AlexanderMarshack, ίσως να έχει επηρεάσει τη μετέπειτα ανάπτυξη των μαθηματικών στην Αίγυπτο, γιατί όπως και σε κάποια στοιχεία του οστού Ishango, και η Αιγυπτιακή αριθμητική έκανε χρήση του πολλαπλασιασμού με το 2· αυτό, παρόλαυτά, αμφισβητείται.

Οι Αιγύπτιοι της Προδυναστικής περιόδου της Αιγύπτου της 5ης χιλιετίας π.Χ. εκπροσωπούνται εικονογραφικά, από γεωμετρικά σχέδια. Έχει διατυπωθεί η άποψη, ότι μεγαλιθικά μνημεία στην Αγγλία και τη Σκωτία, που χρονολογούνται από την 3η χιλιετία π.Χ., ενσωματώνουν γεωμετρικές ιδέες, όπως κύκλους, ελλείψεις, και πυθαγόρειες τριάδες στο σχεδιασμό τους.

Ωστόσο όλα τα παραπάνω αμφισβητούνται, και την τρέχουσα στιγμή, η παλαιότερη αδιαμφισβήτητη χρήση των Μαθηματικών, είναι σε Βαβυλωνιακές και της δυναστικής περιόδου Αιγυπτιακές πηγές. Συνεπώς, το ανθρώπινο όν χρειάστηκε τουλάχιστον 45000 χρόνια από την επίτευξη της συμπεριφορικής και γλωσσικής εξέλιξης, για να αναπτύξει τα μαθηματικά ως έχουν.

Τα Μαθηματικά στην Αρχαία Αίγυπτο

Οι Αιγύπτιοι ανέπτυξαν τα Μαθηματικά, λόγω διάφορων δραστηριοτήτων που προέκυψαν, κυρίως της γεωργίας και του εμπορίου περίπου το 3.000–2.500π.Χ. Η ζωή τους έγινε πιο περίπλοκη και έπρεπε να καταγράφονται δεδομένα για τις σοδειές τους, να κάνουν υπολογισμούς, ώστε να πραγματοποιούνται οι συναλλαγές τους, αλλά και για τη πραγματοποίηση ανταλλαγής προϊόντων. Επίσης, η ραγδαία ανάπτυξη των μαθηματικών είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη του πολιτισμού τους, όπως μπορούμε να διακρίνουμε από τις κατασκευές των πυραμίδων, όπως αυτή της Σφίγγας, είτε από την εξέταση των πλευρών της Μεγάλης Πυραμίδας. Τα πρώτα ιερογλυφικά αριθμητικά μπορούν να εντοπιστούν σε ναούς, μνημεία, ακόμη και βάζα.Τα έγραφαν από αριστερά προς τα δεξιά, από δεξιά προς αριστερά ή από πάνω προς τα κάτω. Ωστόσο, οι περισσότερες γνώσεις που έχουμε για τα μαθηματικά των Αιγυπτίων προέρχονται από παπύρους. Οι σημαντικότεροι από αυτούς είναι ο Πάπυρος Ριντ (Rhind) και ο πάπυρος της Μόσχας. Ο πάπυρος Ρίντ, γνωστός και ως «πάπυρος του Αχμές» αποτελείται από μια συλλογή 84 προβλημάτων που αντιγράφτηκε περίπου το 1650 π.Χ. από ένα πρωτότυπο του 1850 π.Χ. και τώρα φυλάσσεται ως έκθεμα στο Βρετανικό Μουσείο Λονδίνου. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι αποτελεί το αρχαιότερο ευρύτερα γνωστό μαθηματικό κείμενο. Ο Πάπυρος της Μόσχας, από την άλλη, είναι μια συλλογή 25 προβλημάτων (εκ των οποίων πολλά είναι γεωμετρικά) που γράφτηκε γύρω στο 1850 π.Χ. Τα προβλήματα αυτά δεν είχαν μόνο πρακτική εφαρμογή αλλά είχαν τεθεί για να διδάξουν τη χρήση του αριθμητικούσυστήματος. Το αρχαίο αιγυπτιακό αριθμητικό σύστημα βασιζόταν στον αριθμό δέκα αλλά δεν ήταν ένα πλήρες ανεπτυγμένο δεκαδικό σύστημα. Θα έπρεπε, όμως, να τονίσουμε ότι ήταν το πρώτο το οποίο χρησιμοποίησε σημάδια ως σύμβολα των αριθμών, τα οποία και συχνά ομαδοποιούνταν, ώστε να εκφράσουν μεγαλύτερους αριθμούς.Είχαν έναν ορισμένο τρόπο για να γράφουν τα σύμβολα, π.χ. για το πέντε δεν έγραφαν IIIII αλλά έγραφαν III και αμέσως από κάτω II. Ήταν πιο εύκολο να δει κανείς τρία σημάδια στη σειρά και έπειτα δυο ξέχωρα σημάδια, από το να διακρίνει πέντε σημάδια στην ίδια σειρά. Κάτι παρόμοιο κάνουμε κι εμείς σήμερα για το πέντε. Επίσης για το δέκα χρησιμοποιούσαν ένα σύμβολο σαν ανάποδο U. Παράλληλα, σκέφτηκαν ότι δε χρειάζεται να γραφεί ή να μετρηθεί περισσότερο από εννιά φορές ένα σύμβολο και έτσι επινόησαν ένα καινούργιο σύμβολο για κάθε φορά που έπρεπε να γραφεί κάποιο σύμβολο δέκα φορές. Έτσι χρησιμοποίησαν ένα σύμβολο σαν σπείρα που μοιάζει λίγο με αυτό: 9. Έτσι συμπεραίνουμε ότι έδωσαν ιδιαίτερη σημασία στον αριθμό δέκα και ότι για τους αριθμούς από το 1 μέχρι 999 δεν χρειαζόταν να θυμούνται παρά τρία σύμβολα. Υπήρχαν διαφορετικά ιερογλυφικά σύμβολα για τις μονάδες,δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες,δέκα χιλιάδες και ένα εκατομμύριο. Οι Αιγύπτιοι ανέπτυξαν δύο είδη συμβόλων για τους αριθμούς τους. Το ένα ήταν η επίσημη γραπτή γλώσσα των ιερογλυφικών που χρησιμοποιούνταν στα μνημεία και στα δημόσια κτίρια, ενώ η άλλη ήταν η ιερατική γραπτή γλώσσα που χρησιμοποιούνταν στις καθημερινές εμπορικές συναλλαγές. Οι πρώτοι εννέα αριθμοί στα ιερογλυφικά εμφανίζουν το χαρακτηριστικό της αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης. Για το 10 εισάγεται νέο σύμβολο και στη συνέχεια νέα σύμβολα εισάγονται μέχρι και το ένα εκατομμύριο.Οι αριθμοί μερικές φορές γράφονταν και λεκτικά, αλλά αυτό συνηθιζόταν κυρίως μόνο για το ένα και το δύο.Επίσης, το αρχαίο Αιγυπτιακό σύστημα δεν ήταν σύστημα θέσης, αφού η αξία κάθε συμβόλου είναι πάντοτε ίδια, ανεξάρτητα από τη θέση που έχει μέσα στον αριθμό. Τέλος, οι Αιγύπτιοιγνώριζαν την τιμή του π=3,14 και δενχρησιμοποιούσαν το μηδέν στα μαθηματικά τους, ενώ φαίνεται να είχαν σύμβολο για το άπειρο.



ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Η πρόσθεση γινόταν πολύ απλά. Αντικαθιστούσαν κάθε δέκα σύμβολα μιας τάξης με ένα σύμβολο ανώτερης τάξης.Δηλαδή μετρούσαν τα σύμβολα της μονάδας,τασύμβολα της δεκάδας, τα σύμβολα της εκατοντάδας που υπήρχαν στους αριθμούς που επρόκειτο να προστεθούν και στη συνέχεια αν τα σύμβολα της μονάδας κάποιας τάξης ήταν περισσότερα από 10 αντικαθιστούσαν 10 σύμβολα της μονάδας της τάξης αυτής με ένα σύμβολο της μονάδας της αμέσωςεπόμενης τάξης.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Την αφαίρεση, από την άλλη, την αντιμετώπιζαν ως αντίθετη πράξη της πρόσθεσης. Δηλαδή για να αφαιρέσουν το x από το y έβρισκαν τον αριθμό που έπρεπε να προστεθεί στο x για να δώσει το άθροισμαy.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

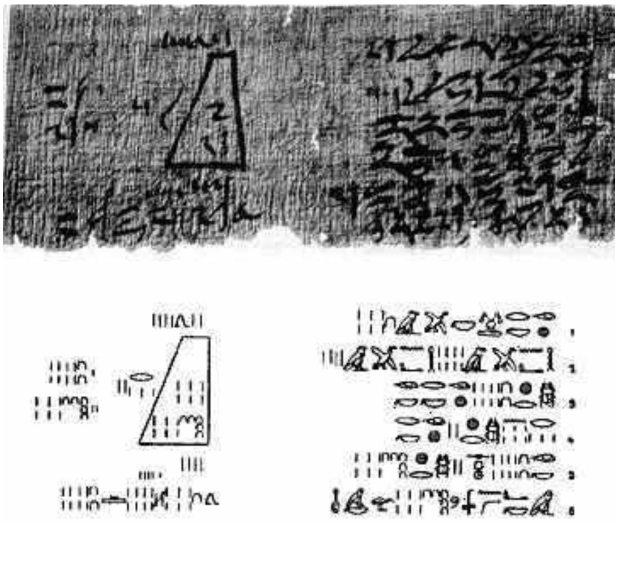
Ο πολλαπλασιασμός γινόταν με τη μέθοδο του διπλασιασμού και της πρόσθεσης.Όταν ήθελαν να υπολογίσουν ένα γινόμενο αποφάσιζαν πρώτα ποιος θα είναι ο πολλαπλασιαστής και ποιος ο πολλαπλασιαστέος.Αν ο πολλαπλασιαστής είναι το x και ο πολλαπλασιαστέος το y τότε διπλασίαζαν τον πολλαπλασιαστέο ώστε το άθροισμα κάποιων από τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7,8 κ.λ.π. να δίνει τον αριθμόx.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

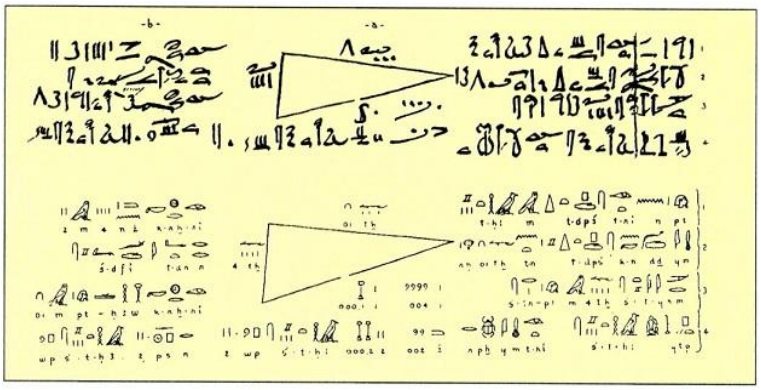
Τέλος, τη διαίρεση την αντιμετώπιζαν οι Αιγύπτιοι ως αντίθετηπράξη του πολλαπλασιασμού.Αν είχαν να διαιρέσουν τοναριθμόχ με το y θα έβρισκαν έναν αριθμό με τονοποίο αν πολλαπλασίαζαν το y θα έδινε x.Όσον αφορά τα κλάσματα οι Αιγύπτιοι γνώριζαν τα κλάσματα που είχαν στον αριθμητή το 1(μονοειδή) και τα κλάσματα 2/3 και 3/4.

☺Παρόλο που τα Μαθηματικά των Αιγυπτίων υστερούσαν σε σχέση με αυτά των Βαβυλώνιων, **οι Αιγύπτιοι κατάφεραν μεγάλους άθλους όσον αφορά τις μετρήσεις**. Για τις διαστάσεις των πυραμίδων, σύμφωνα με κάποιους επιστήμονες, οι Αιγύπτιοι φαίνεται να γνώριζαν ορισμένες ανώτερες μαθηματικές σχέσεις. Από την άλλη πλευρά, οι Αιγύπτιοι είχαν και κάποιες αδυναμίες. Δεν γνώριζαν το Πυθαγόρειο θεώρημα, παρ' όλα αυτά το εφάρμοζαν χωρίς να το καταλαβαίνουν. Δεν γνώριζαν και τους άρρητους αριθμούς. Επίσης δεν κατόρθωσαν να δώσουν ζωή σε κάποια μαθηματική θεωρία, ούτε να γράψουν ένα κεφάλαιο Αριθμητικής ή Γεωμετρίας. Ο λόγος αυτής της αδυναμίας πρέπει να αναζητηθεί στην γενική τάση των ερευνών να μην έχουν στόχο την αποκατάσταση αληθειών θεωρητικού χαρακτήρα αλλά μόνοτην εξυπηρέτηση πρακτικών αγαθών (αστρολογία, μηχανική).

Πάπυρος Ρίντ:

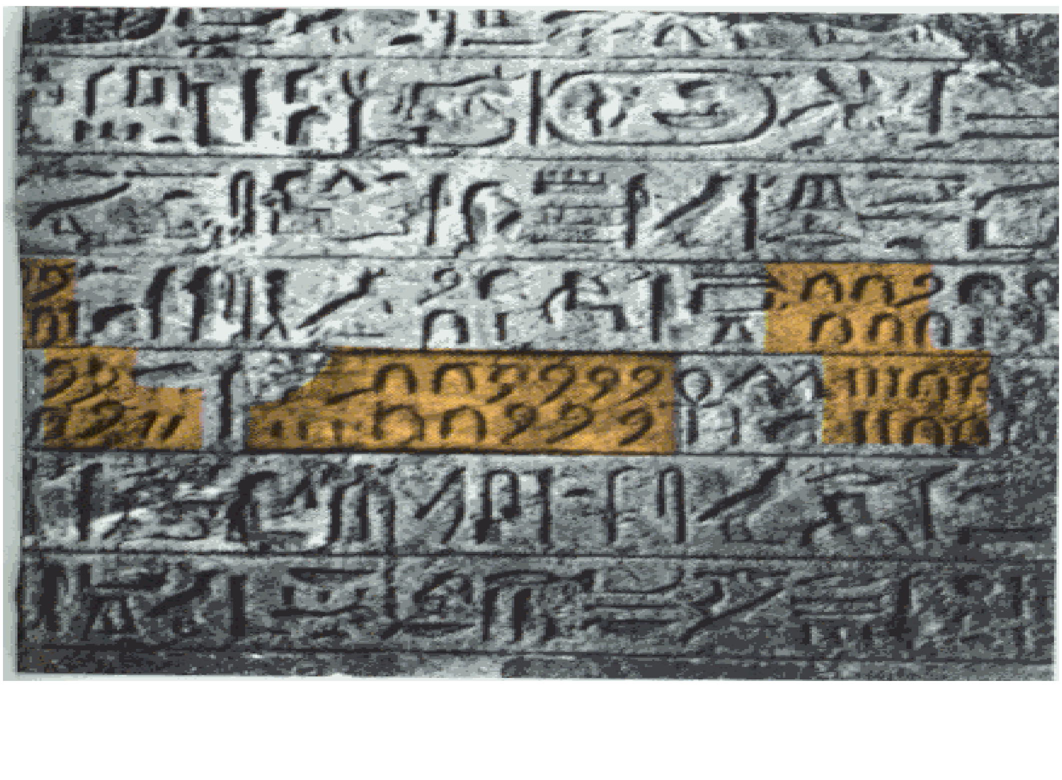


Πάπυρος Μόσχας:



Τα δύο είδη συμβόλων:

Στήλη του 1450 π.Χ. με αιγυπτιακή ιερογλυφική γραφή, στα σημεία που είναι χρωματισμένα διακρίνονται αριθμητικά σύμβολα:



Από το βιβλίο «Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών»:

	Ιερογλυφικά	Ιερατική γραφή		Ιερογλυφικά	Ιερατική γραφή
1			100		
2			1.000		
3			10.000		
4			100.000		
5			1.000.000		
6			1/2		
7			1/3		
8			2/3		
9			1/4		
10			1/5		

ΕΙΚΟΝΑ 15. Αρχαία αιγυπτιακά ιερογλυφικά και ιερατικά αριθμητικά ψηφία.

ΒΑΒΥΛΩΝΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ο όροςβαβυλωνιακά μαθηματικά αναφέρεται στα μαθηματικά που αναπτύχθηκαν από τους ανθρώπους της Μεσοποταμίας (σύγχρονο Ιράκ) από τους πρώτους Σουμέριους μέχρι την Ελληνιστική περίοδο περίπου ως την εμφάνιση του Χριστιανισμού. Ονομάζονται Βαβυλωνιακά μαθηματικά λόγω του κύριου ρόλου της Βαβυλώνας ως τόπος σπουδών. Από ενδείξεις προκύπτειότι αυτές οι κοινωνίες χρησιμοποιούσαν τα μαθηματικά για να επιλύσουν προβλήματα του πραγματικού κόσμου, όπως η μέτρηση εμβαδών και όγκων για την κατασκευή κτιρίων ή ο υπολογισμός των ημερομηνιών για τη συγκρότηση των ημερολογίων . Όταν αναφέρονταν σε ευθείες , εννοούσαν συγκεκριμένες γραμμές που σχεδιάζονταν στο έδαφος . Όταν υπολόγιζαν τον όγκο ενός κυλίνδρου, επρόκειτο για έναν πραγματικό υπαρκτό κύλινδρο. Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν τους θετικούς ακέραιους , και κλάσματα της μορφής n/60, όπου n ακέραιος. Σε αντίθεση με τις ελάχιστες αναφορές σε πηγές στα Αιγυπτιακά μαθηματικά, οι γνώσεις μας για τα Βαβυλωνιακά μαθηματικά προέρχονται από περισσότερες από 400 πήλινες πλάκες οι οποίες ήρθαν στο φως από το 1850, γραμμένες στη σφηνοειδή γραφή. Έχουν ανακαλυφθεί τετρακόσιες περίπου πήλινες πλάκες με μαθηματικόπεριεχόμενο, καταγεγραμμένο σε γραφή σφηνοειδή. Αυτά γράφονταν σε πήλινες πλάκες που ψήνονταν στο καυτό ήλιο.Η πλειοψηφία των πήλινων πλακών που έχουν ανακτηθεί χρονολογείται από το 1800 στο 1600 π.Χ., και καλύπτει θέματα που περιλαμβάνουν συναρτήσεις, άλγεβρα, τετραγωνικές και κυβικές εξισώσεις, και τον υπολογισμό τωνπεριοδικών και αμοιβαίων ζευγών. Οι πλάκες επίσης περιλαμβάνουν πίνακες πολλαπλασιασμού και μεθόδους επίλυσης γραμμικών και τετραγωνικών εξισώσεων. Η Βαβυλώνια πλάκα YBC 7289 δίνει μία προσέγγιση της √2 με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων.Οι Βαβυλώνιοι είχαν ένα ανεπτυγμένο αριθμητικό σύστημα, το εξηνταδικό (βάση το 60). Από αυτό απορρέει η σύγχρονη χρήση των 60 δευτερολέπτων σε ένα λεπτό, 60 λεπτών σε μία ώρα, και 360 (60 x 6) μοιρών σε έναν κύκλο, όπως επίσης και η χρήση των δευτερολέπτων και των λεπτών ενός τόξου για να υποδηλώσει εξισώσεις κάποιου βαθμού. Χρησιμοποιούσαν πίνακες για να βρουν αποτελέσματα ανατοκισμώνκαι είχαν κάποια ιδέα για το Πυθαγόρειο Θεώρημα, που λέει ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο τοάθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών ισούται με το τετράγωνο της υποτείνουσας.Η Βαβυλωνιακή ανάπτυξη στα μαθηματικά διευκολύνθηκε από το γεγονός ότι το 60 έχει πολλούς διαιρέτες. Παράλληλα, το σύστημα αρίθμησης περιλάμβανε 2 μόνο σύμβολα: ένα καρφί για τις μονάδες και μία σφήνα για τις δεκάδες.

καρφί σφήνα

Με τον συνδυασμό των δύο αυτών συμβόλων εκφράζονταν οι αριθμοί από το 1 εως 59, χρησιμοποιώντας τη τακτική της πρόσθεσης και βάση το 10 οι οποίοι γράφονταν με επαναληπτικό τρόπο. Ειδικό σύμβολο για το 0 δεν υπήρχε στο σύστημα αυτό. Για παράδειγμα το 12 γράφονταν με 1 γωνία και 2 σφήνες, το 33 με 3 γωνίες και με 3 σφήνες κτλ.Από 60 και μετά χρησιμοποιούντανταίδια ψηφία αλλά με τη σημασίατων εξηντάδων. Η τεχνική των πράξεων στο βαβυλωνιακό σύστημα δεν διαφέρει στην ουσία από την τεχνική που ακολουθούσαμε στο δεκαδικό αριθμητικό σύστημα.

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Οι Βαβυλώνιοι εκτελούν την πρόσθεση και την αφαίρεση όπως εμείς με τη διαφορά ότι αντί να μεταφέρουν δεκάδες, μεταφέρουνεξηντάδες.

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Αντιμετωπίζεται ως αντίθετη πράξη της πρόσθεσης. Π.χ. για να αφαιρέσουν το 17 από το 42 έβρισκαν έναν αριθμό, τον οποίο πρόσθεταν στο 17 για να δώσει 42.

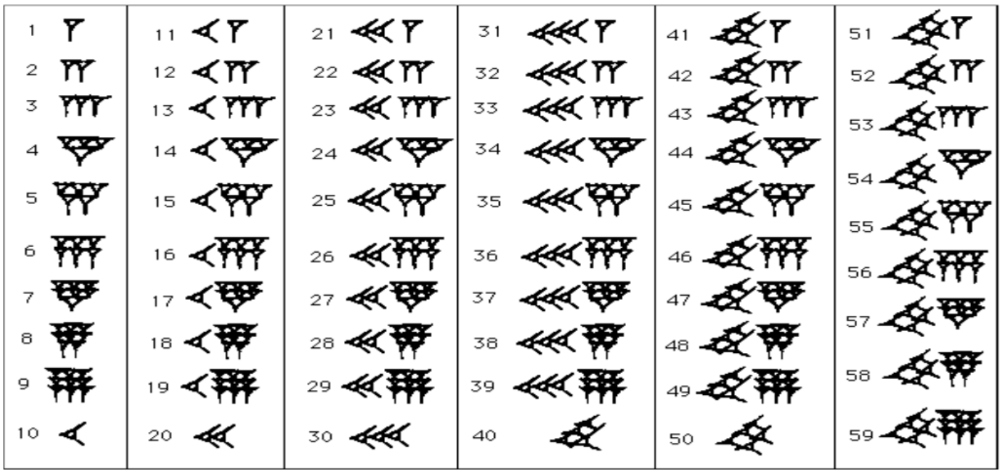
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Στα κείμενα δεν αναφέρεται κάποια μεθοδολογίαπου ακολουθούν οι Βαβυλώνιοι για να πολλαπλασιάζουν αριθμούς. Ωστόσο πολλοί πίνακες περιέχουν τα πολλαπλάσια πολλών αριθμών:2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,40,45,48,50.

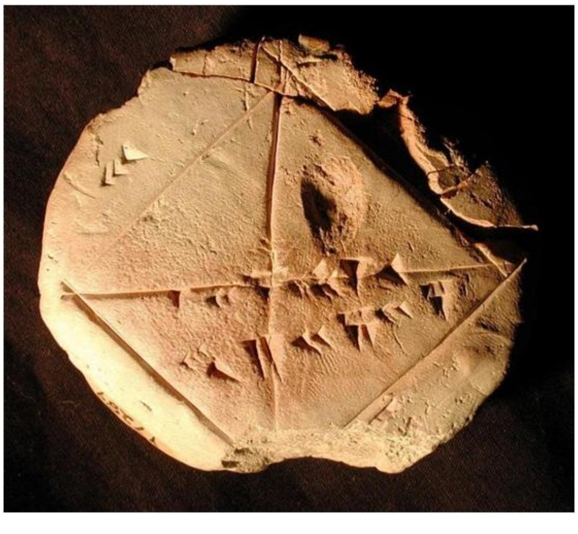
ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Τη διαίρεση ενός αριθμού προς έναν άλλον τηναντιμετώπιζαν ως πολλαπλασιασμό του διαιρετέου επί τον αντίστροφο του διαιρέτη.

☺Αντίθετα με τους Αιγύπτιους, τους Έλληνες, και τους Ρωμαίους, οι Βαβυλώνιοι είχαν ένα πραγματικό σύστημα θέσης - αξίας, όπου τα ψηφία γράφονταν στην αριστερή στήλη αντιπροσωπεύοντας μεγαλύτερες τιμές, όπως στο δεκαδικό σύστημα. Ωστόσο τους έλειπε ένα σύμβολο ισοδύναμο της υποδιαστολής, και έτσι η αξία της θέσης ενός συμβόλου συχνά έπρεπε να γίνει κατανοητή από το περιεχόμενο. Από την άλλη πλευρά, αυτό το "ελάττωμα" είναι ισοδύναμο με τη σημερινή χρήση της κινητής υποδιαστολής.Εξάλλου η χρήση της βάσης του 60 σημαίνει ότι οποιοιδήποτε αμοιβαίοι ακέραιοι οι οποίοι είναι πολλαπλάσια διαιρετών του 60 υποχρεωτικά έχουν μία πεπερασμένη επέκταση στη βάση 60.(Στη δεκαδική αριθμητική, μόνο τα αμοιβαία των πολλαπλασίων του 2 και 5 έχουν πεπερασμένη δεκαδική έκφραση.) Επομένως, υπάρχει μία μεγάλη διαμάχη ότι ο συμβολισμός των αρχαίων Βαβυλωνίων θεωρείται πιο εξελιγμένος από τον σημερινό. Τέλος, **οι Βαβυλώνιοι ήταν οι πρώτοι οι οποίοι εφάρμοσαν καθοριζόμενο σύστημα αρίθμησης**. Για παράδειγμα ο αριθμός 143 είναι ίσος με 1+4+3=8.Ενώ στο δεκαδικό σύστημα που είναι καθοριζόμενο από τη θέση σύστημα αρίθμησης , είναι ίσος με 1·100+4·10+3, δηλ εκατόν σαράντα τρία.



Η Βαβυλώνια πλάκα YBC 7289:



ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΣΟΥΜΕΡΙΩΝ

Ήδη απ' την 8η χιλιετία π.Χ. οι κάτοικοι της περιοχής που έμελλε να κατοικήσουν οι Σουμέριοι, χρησιμοποιούσαν ένα σύστημα αριθμητικής καταγραφής βασισμένο σε μικρές πήλινες "μάρκες" (tokens), τουλάχιστον όσον αφορά στην καταμέτρηση γεωργικών προϊόντων. Στην εποχή που κατοικούν την περιοχή οι Σουμέριοι, οι οποίοι αργότερα απορροφήθηκαν από τον βαβυλωνιακό πολιτισμό, τα μαθηματικά φαίνονται να έχουν ένα καθαρά ωφελιμιστικό χαρακτήρα, εξυπηρετώντας τον σκοπό μιας "αναδιανεμητικής οικονομίας" που ήταν υπό τη διεύθυνση του Ιερατείου. Η ανάγκη δημιουργίας των αριθμών από τους Σουμέριους ήταν, κυρίως, για εμπορικούς λόγους. Όταν ήθελαν να στείλουν ένα εμπόρευμα, το φορτίο έπρεπε να συνοδεύεται από ένα <<έγγραφο>> το οποίο αποτελούνταν από ένα σύνολο κουπονιών που προσδιόριζαν τον αριθμό και το είδος των αγαθών που μεταφέρονταν. Υπήρχε όμως ο κίνδυνος κλοπής αγαθών και των αντίστοιχων κουπονιών. Επομένως επινόησαν μια τεχνική για να φρουρούν τα κουπόνια: τα κάλυπταν με πηλό και μετά τα έψηναν, με αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας σκληρής μπάλας από πηλό που στο εσωτερικό της βρίσκονταν τα κουπόνια. Ο αγοραστής όταν παραλάμβανε το φορτίο έσπαγε τον πηλό για να επαληθεύσει ότι ο αριθμός των κουπονιών αντιστοιχούσε στα αγαθά. Το σύστημα αυτό λειτουργούσε καλά, μέχρι που οι Σουμέριοι κατάλαβαν ότι τα κουπόνια που περιέχονταν ήταν περιττά. Κάθε κουπόνι όμως, εξακολουθούσε να αναπαριστά ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, γιατί οι αριθμοί δεν είχαν διαχωριστεί από τα μετρούμενα αντικείμενα. Αυτό το είδος αρίθμησης ονομάζεται συγκεκριμένη αρίθμηση από την ΝτενίζΣμαντ- Μπεσερά και χρησιμοποιούνταν σε φακέλους και πλακίδια μεταξύ 3500-3100 π.Χ. Τέλος γύρω στο 3100 π.Χ. ,οι Σουμέριοι διαχώρισαν τα αποτυπώματα που αναπαριστούσαν τον αριθμό των αντικειμένων από τα ίδια αντικείμενα. Όταν διαχωρίστηκαν οι έννοιες των αριθμών από τις έννοιες των μετρούμενων αντικειμένων, τα πικτογράμματα δεν δήλωναν πλέον αποκλειστικά τον αριθμό των αγαθών με μία αντιστοιχία ένα προς ένα. Με την εφεύρεση των αριθμητικών ψηφίων, η πικτογραφία δεν περιοριζόταν πλέον στους λογαριασμούς, αλλά επεκτάθηκε και σε άλλες περιοχές των ανθρώπινων επιδιώξεων. Η εφεύρεση των αφηρημένων αριθμητικών ψηφίων ήταν η αρχή των μαθηματικών και, επίσης, η αρχή της γραφής. Η ανάγκη καταγραφής των αριθμών ήταν αυτή που έδωσε αρχικά την ώθηση για την ανάπτυξη της γραφής. Λίγα είναι γνωστά για τα μαθηματικά των Σουμέριων αλλά από τα πλακίδια που σώζονται είναι φανερό ότι γνώριζαν τις τέσσερις βασικές πράξεις της αριθμητικής: την πρόσθεση, την αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση. Επειδή η κοινωνία των Σουμερίων ήταν πολύπλοκη, απαιτούσε επιδεξιότητα στον χειρισμό των φυσικών αριθμών. Από τα πρώτα κουπόνια που αντιπροσώπευαν αριθμούς καταλαβαίνουμε ότι το σύστημα αρίθμησης των Σουμέριων ήταν πολύπλοκο σε σχέση με το δυαδικό ή το εξηκονταδικό. Από τα πλακίδια που έχουν σωθεί, λοιπόν, γνωρίζουμε ότι οι Σουμέριοι μπορούσαν να δουλεύουν τόσο με μεγάλους ή μικρούς αριθμούς, όσο και με κλάσματα. Βέβαια αυτό δεν αποκλείει τη κατοχή και χρήση γνώσεων στον τομέα των Μαθηματικών, σε πιο θεωρητικό επίπεδο και για μη-ωφελιμιστικούς σκοπούς, απ' τους ίδιους τους ιερείς, όπως ακριβώς φαίνεται ότι συνέβαινε με κάθε είδος γνώσης. Η γνώση ήταν προνόμιο ενός κλειστού ιερατικού κύκλου στα πλαίσια των Μυστηρίων που άνθησαν και στη Μεσοποταμία. Μόνο οι πρακτικές όψεις κάθε επιστήμης (όπως η καταγραφή προϊόντων ή ο καταμερισμός της γης) εκλαϊκεύονταν. Αυτή είναι μια όψη που συχνά οι σύγχρονοι αρχαιολόγοι παραβλέπουν, θεωρώντας κάθε ανάπτυξη γνώσης, αποτέλεσμα υλιστικών και πρακτικών αναγκών και όχι εφαρμογή ενός θεωρητικού υπόβαθρου). Τα αρχαιολογικά ευρήματα της Μεσοποταμίας που ήρθαν στο φως τους τελευταίους αιώνες, περιλάμβαναν αρκετά κείμενα (χαραγμένα πάνω σε πήλινες πινακίδες) που αφορούσαν στις γνώσεις των λαών της περιοχής για τα Μαθηματικά. Η σφηνοειδής γραφή των πινακίδων αυτών αποκρυπτογραφήθηκε στα μέσα του 19ου αιώνα απ' τον γερμανό G.F. Grotefend (1775-1853) και τον άγγλο ταγματάρχη H. Rawlinson (1810-1895). Από τις περίπου μισό εκατομμύριο πήλινες πινακίδες σφηνοειδούς γραφής που έχουν βγει στο φως σχεδόν 500 είναι αυτές που έχουν άμεσο μαθηματικό ενδιαφέρον. Οι πινακίδες αυτές βρίσκονται σε συλλογές σε διάφορα μουσεία της Ευρώπης, των Η.Π.Α. καθώς και στο Αρχαιολογικό Μουσείο της Βαγδάτης. Αργότερα, στα τέλη της δεκαετίας του 1930, τα μαθηματικά αυτά κείμενα άρχισαν να αποκρυπτογραφούνται απ' τον αυστριακό OttoNeugebauer (1899- 1990), κορυφαίο ερευνητή των μαθηματικών και της αστρονομίας της Μεσοποταμίας. Αν και οι περισσότερες πινακίδες χρονολογούνται στην εποχή της Βαβυλωνιακής αυτοκρατορίας, ωστόσο είναι γνωστό ότι οι γνώσεις της εποχής αυτής αποτελούν κληρονομιά και μετεξέλιξη των σουμεριακών μαθηματικών. Η δημιουργία της γραφής ήταν στενά συνδεδεμένη με την ανάγκη απογραφής των καταμετρήσεων και με την χρήση των αριθμών. Σύντομα εμφανίστηκαν σύμβολα στη θέση των κανονικών ονομάτων (για να ταυτοποιήσουν τον ιδιοκτήτη των αγαθών) . Οι παλαιότεροι πήλινοι δίσκοι, που χρονολογούνται πριν από το 3.100 π. Χ. και προέρχονται από τις πόλεις της Σουμερίας, δείχνουν αποτυπώματα αριθμητικών μονάδων που απεικονίζουν διάφορους αριθμούς και επιπλέον σχέδια ή πικτογράμματα αγαθών, όπως κοπάδια ή μόδια σπόρων. Τα κείμενα σφηνοειδούς γραφής της τρίτης χιλιετηρίδας δεν αφήνουν αμφιβολία για το γεγονός ότι οι **Σουμέριοι είχαν αναπτύξει ένα περίπλοκο εξηκονταδικό σύστημα αρίθμησης**. Δεν υπάρχει επίσης αμφιβολία ότι η αριθμητική τους βασιζόταν στην αφηρημένη αρίθμηση. Η εμφάνιση του αριθμητικού συστήματος των Σουμερίων, που άρχισε με την χρήση πήλινων μονάδων μέτρησης και τελείωσε με ένα πολύπλοκο σύστημα γραφής για τους αφηρημένους αριθμούς, σηματοδοτούν τις δύο από τις τρεις κινητήριες δυνάμεις που προώθησαν τα μαθηματικά. Πρώτα είχαμε την γενίκευση, δηλαδή την απόδοση αφηρημένης έννοιας στους αριθμούς. Για παράδειγμα, οι αριθμοί δεν αναφέρονταν πια σε συγκεκριμένα φυσικά αντικείμενα αλλά άρχισαν να έχουν, από μόνοι τους, δική τους ανεξάρτητη οντότητα. Για να απεικονιστεί οποιοδήποτε σύνολο από δύο αντικείμενα απαιτούνταν ένας μόνο αριθμός ,το δύο, χωρίς να χρειάζονται πλέον διαφορετικά ονόματα για διαφορετικά σύνολα που περιείχαν δύο στοιχεία. Η μεταβολή δεν φαίνεται να συνέβη ξαφνικά - μάλλον διήρκεσε πολλά χρόνια. Μολονότι αυτό μπορεί να φαίνεται απλό επίτευγμα, παρά ταύτα αποτελεί λαμπρό άλμα πνευματικής δεξιοτεχνίας. Η δεύτερη μεγάλη κινητήρια δύναμη που έδωσε ώθηση στα μαθηματικά ήταν η ανάπτυξη ενός συμβολισμού που μας επιτρέπει να καταγράφουμε και να χειριζόμαστε τους αριθμούς. Ξεκίνησε και αυτό από τους Σουμέριους , όταν άρχισαν να αποτυπώνουν το σχήμα των μονάδων τους σε μαλακές πήλινες πινακίδες πριν τις ψήσουν. Ως εκ τούτου, οι αριθμοί μπορούσαν, πλέον, να απεικονιστούν με γραπτά σύμβολα. Στην αρχή, η διαδικασία αυτή ήταν ένας αμφιμονοσήμαντος συγκεκριμένος συμβολισμός, αλλά τελικά προέκυψαν σύμβολα που αντιπροσώπευαν ομάδες αντικειμένων. Το σύστημα αρίθμησης των Σουμερίων χρησιμοποιούσε συνδυασμό συμβόλων για το 10 και το 60, και είναι γνωστό ως εξηκονταδικό. Από το 2400 π.Χ. είχαν αρχίσει να χρησιμοποιούν κλάσματα. Με το εξηκονταδικό τους σύστημα μπορούσαν να γράφουν πολύ μεγάλους αλλά και πολύ μικρούς αριθμούς . Και ενώ οι Αιγύπτιοι χρησιμοποιούσαν μόνο τα μοναδιαία κλάσματα , οι Σουμέριοι χρησιμοποιούσαν, όπως και οι Βαβυλώνιοι, κλάσματα της μορφής n/60 . Το πλεονέκτημα του συστήματος των Σουμερίων ήταν ότι τα κλάσματα μπορούσαν να γραφτούν και να χρησιμοποιηθούν εύκολα. Το μειονέκτημα ήταν ότι ο αναγνώστης έπρεπε να καταλαβαίνει από το κείμενο αν επρόκειτο για ακέραιους αριθμούς ή κλάσματα. Επίσης, υπήρχε έλλειψη υποδιαστολής, συμβόλου για «μηδέν» και στις αριθμητικές πράξεις όλοι οι αριθμοίαντιμετωπίζονται ως ακέραιοι. Αξίζει να σημειωθεί και ότι δεν είναι ξεκάθαρο πότε οι άνθρωποι άρχισαν να εξετάζουν την έννοια του απείρου. Σίγουρα την εξέταζαν πριν από τους Έλληνες, αφού οι Σουμέριοι είχαν εξοικείωση με την έννοια. Στο μύθο του Γκιλγκαμές, που έφτασε ως εμάς σε σφηνοειδής πίνακες που χρονολογούνται από το 2000 π.Χ. Θεωρούμε ότι η λέξη <<αιώνιο>> πρέπει να σημαίνει <<συνεχιζόμενο χωρίς τέλος>> ή άπειρο στο χρόνο. Στην γλώσσα των Σουμερίων, η λέξη <<ιμίν>> σήμαινε τον αριθμό επτά αλλά πήρε, επίσης και την έννοια του μη αριθμήσιμου.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Η διαίρεση α / β ισοδυναμούσε με τον πολλαπλασιασμό α β-1.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

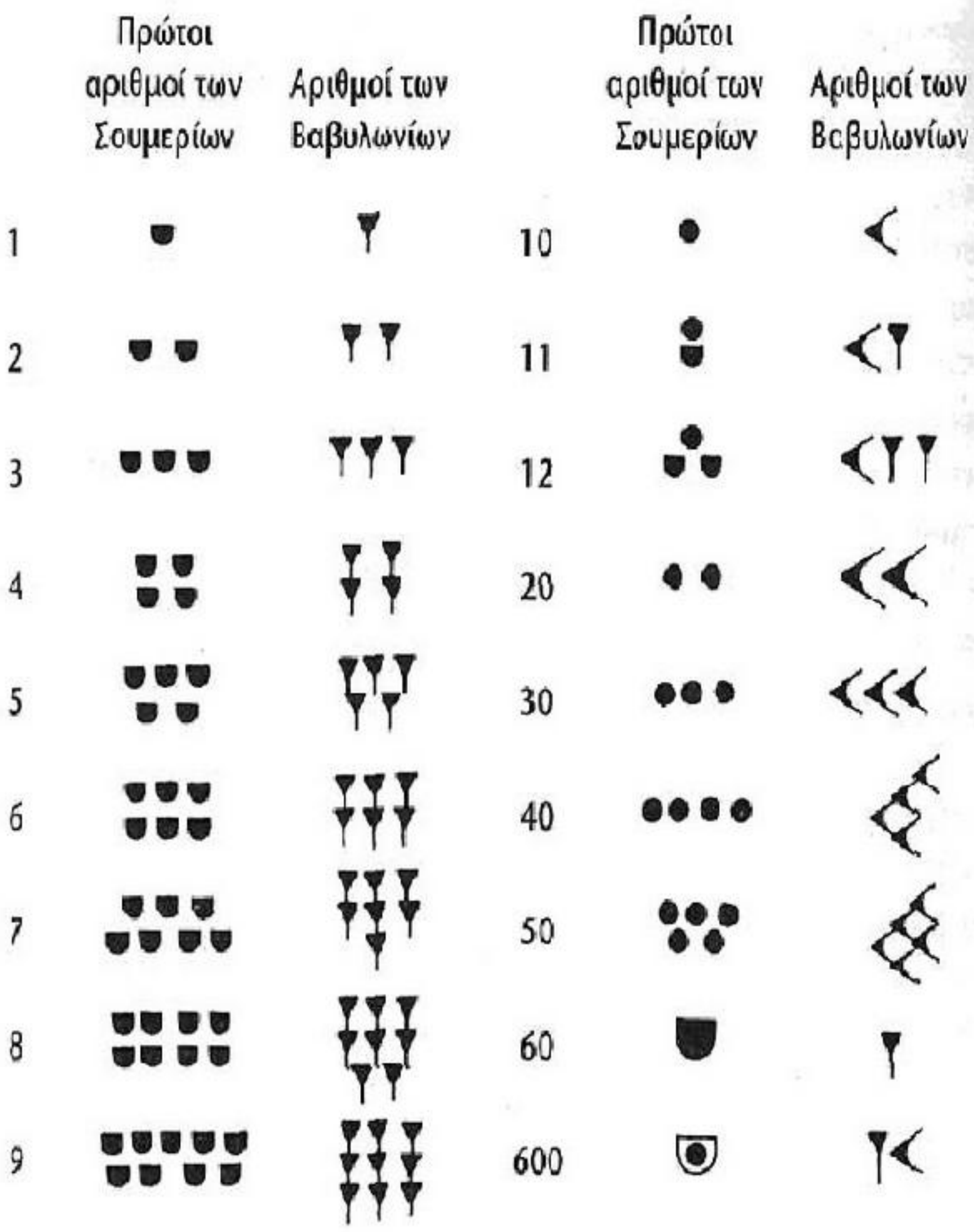
Ο πολλαπλασιασμός τους γίνεται σαν να είναι ακέραιοι αριθμοί και το μόνο που χρειάζεται είναι να τοποθετηθεί στο τέλος, μετά την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού, η υποδιαστολή στην κατάλληλη θέση.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η σουμεριακή γεωμετρία περιλάμβανε τον υπολογισμό των εμβαδών, όγκων και μετρικών σχέσεων σε τρίγωνα και τραπέζια. Γνώριζαν να υπολογίζουν το εμβαδόν του ορθογωνίου και του ορθογωνίου τριγώνου και απ' αυτά και άλλων σχημάτων. Υπολόγιζαν επίσης σωστά τους όγκους πρισμάτων και κυλίνδρων. Για τους υπολογισμούς σε κύκλους και κυλίνδρου χρησιμοποιούσαν την προσέγγιση π = 3. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η πινακίδα "Plimpton 322", δείχνει ότι μπορούσαν να υπολογίσουν την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με όμοιο τρόπο με το "Πυθαγόρειο Θεώρημα". Το ότι τα Μαθηματικά και οι Γεωμετρία ήταν όχι μόνο θεωρητικές επιστήμες, αλλά εφαρμόσιμες και στην πράξη, αντικατοπτρίζεται στην Αρχιτεκτονική τους που ύψωσε κλιμακωτές πυραμίδες (ζιγκουράτ) και μεγαλοπρεπείς ναούς.

☺Το ότι η χρήση των αριθμητικών μεθόδων δεν περιορίζονταν σε εμπορικούς και οικονομικούς σκοπούς, αλλά προχωρούσε σε θεωρητικό επίπεδο μέσα από μια εκπαιδευτική διαδικασία, φαίνεται απ' την αρχαιολογική ανακάλυψη πολλών προβλημάτων που απαιτούν τη χρήση εξισώσεων για την επίλυσή τους. Χαρακτηριστικό είναι ένα απ' τα 22 προβλήματα που περιέχονται στην πινακίδα «YBC 4652».

Σουμεριακό κείμενο:



ΕΙΚΟΝΑ 12. Οι πρώτοι αριθμοί των Σουμερίων και οι αριθμοί των Βαβυλωνίων. Η σφηνοειδής γραφή των Σουμερίων υιοθετήθηκε από τους Βαβυλώνιους, γι' αυτό και οι μετέπειτα αριθμοί των Σουμερίων ταυτίζονταν σχεδόν με τους αριθμούς των Βαβυλωνίων.

Από το βιβλίο «Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΛΑΩΝ ΤΟΥ ΗΛΙΟΥ

ΙΝΚΑΣ

1410-1530 μ.Χ. Οι Ίνκας έφτιαξαν ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το 10, για να παρακολουθούν τις καθημερινές δραστηριότητες του μεγάλου πληθυσμού τους (Μέσα σε 200 χρόνια είχαν πληθυσμό 6-12.000.000 άτομα). Το αριθμητικό τους σύστημα βασιζόταν στα κουιπού. Τα κουιπού ήταν περίπλοκα συστήματα σπάγκων με κόμπους που χρησίμευαν για την καταχώρηση και αποθήκευση αριθμητικών πληροφοριών.Το σύστημά τους ήταν δεκαδικό, θεσιακό, μη ψηφιακό.Οι Ίνκας έκαναν τις πράξεις τους χρησιμοποιώντας ένα είδος άβακα, το γιουπάνα. Το γιουπάνα ήταν μια πλάκα χωρισμένη σε τετράγωνα πάνω στα οποία τοποθετούσαν σπόρους καλαμποκιού που τους μετακινούσαν από τετράγωνο σε τετράγωνο για να κάνουν τους λογαριασμούς τους.

Είχαν ανακαλύψει τον δυαδικό κώδικα, 500 χρόνια πριν εφευρεθεί ο ηλεκτρονικός υπολογιστής!
Μια πιο σύγχρονη έρευνα έγινε από τον ανθρωπολόγο του Harvard, καθηγητή GaryUrton, ο οποίος κατάφερε να μελετήσει 450 από τα διασωθέντα quipu. Τα ευρήματα του, προκαλούν δέος για τον πολιτισμό των Ίνκας:

"Τα κορδόνια και οι κόμποι των quipu περιέχουν ένα δυαδικό κώδικα παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιούν σήμερα οι υπολογιστές, ικανό να μεταβιβάσει περισσότερους από 1.500 χαρακτήρες. Ο δημιουργός του quipu κάθε φορά έπρεπε να πάρει μια απόφαση μεταξύ δύο πιθανοτήτων: παραδείγματος χάρη να κρεμάσει το κορδόνι στο μπροστινό ή στο πίσω μέρος του βασικού οριζόντιου σπάγκου ή να δέσει ένα μάλλινο ή ένα βαμβακερό κορδόνι κλπ. Με δεδομένο ότι οι Ίνκας χρησιμοποιούσαν 24 διαφορετικά χρώματα σπάγκων για την δημιουργία ενός quipu, οι πιθανότητες που τελικά είχαν σε έναν κώδικα 7 bit ήταν 1536."

Με απλά λόγια, εάν δεχτούμε πως όλα αυτά είναι γεγονότα, τότε οι Ίνκας είχαν ανακαλύψει έναν δυαδικό κώδικα που τους επέτρεπε να μεταφέρουν περίπου 1536 μονάδες πληροφοριών και ο όποιος μοιάζει πολύ με αυτόν των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ο Urton υποστηρίζει ότι με το σύστημα αυτό οι Ίνκας όχι μόνο κατέγραφαν αριθμητικές πληροφορίες αλλά είναι πολύ πιθανό να περνούσαν στα quipu και την ιστορία του πολιτισμού τους.

ΜΑΓΙΑ

Η ανάπτυξη των μαθηματικών και της αστρονομίας είναι στενά δεμένη με τη θρησκεία τους. Στους υπολογισμούς τους χρησιμοποιούσαν ένα εικοσαδικό σύστημα, με την τελεία ως σημείο αρίθμησης. Η αστρονομία τους υποστήριξε ένα ημερολογιακό σύστημα , η χρονολογία έναρξης του οποίου είναι το 3115 π.Χ. Οι αστρονόμοι Μάγια έκαναν πίνακες των θέσεων της Σελήνης και της Αφροδίτης και ήταν ικανοί να προβλέψουν τις εκλείψεις του ηλίου.

ΑΖΤΕΚΟΙ

Οι Αζτέκοι δεν διαφέρουν πολλοί από τους άλλους λαούς του ήλιου γιατί έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά .

Κινέζικοι αριθμοί και μαθηματικά

Η διαφορά του συστήματος αριθμών από τα άλλα συστήματα κινέζικου οφείλεται εν μέρει στη δομή της κινέζικης γλώσσας. Στο κινεζικό λεξικό περιλαμβάνονται τετρακόσιες είκοσι μονοσύλλαβες λέξεις, και η κάθε μία μπορεί να εκφωνηθεί με τέσσερις τόνους, κάτι που σημαίνει ένα σύνολο περίπου 1.700 ήχων. Για να μπορέσουν να εκφραστούν οι χιλιάδες έννοιες, κάθε λέξη πρέπει να έχει παραπάνω από ένα νόημα. Από την άλλη, η γραπτή γλώσσα στηρίζεται σε πάνω από σαράντα πέντε χιλιάδες ξεχωριστά πικτογράμματα ή χαρακτήρες και κάθε χαρακτήρας επαρκεί για να εκφράσει μια ολόκληρη ιδέα Ως εκ τούτου, τα ομιλούμενα κινέζικα έχουν λίγες λέξεις, ενώ η γραπτή γλώσσα έχει
πολλές χιλιάδες σύμβολα. Επομένως, η γραπτή γλώσσα, που βασίζεται σε πικτογράμματα κι όχι σε φωνητικές λέξεις, μπορούσε να διαβαστ από όλους τους

εγγράμματους Κινέζους της αρχαιότητας παντού στη αυτοκρατορία. Αυτό αποτελούσε μια ενωτική δύναμη, που δεν υπήρχε στις περισσότερες άλλες κοινωνίες, η οποία βοηθούσε στο να παραμένουν ενωμένοι οι κινέζοι, παρέχοντας στην κυβέρνηση τη δυνατότητα ενός εκτεταμένου ελέγχου.

Το βασικό σύστημα αριθμών που αναπτύχθηκε στην κίνα ήταν δεκαδικό και είχε ξεχωριστές λέξεις για τους αριθμούς από το 1 έως το 9. Η λέξη για το 1 ήταν το ι και για το 2 το ερ. οι λέξεις για το 11, το 12 ούτω και καθεξής σχηματίζονταν συνδυάζοντας τη λέξη για το 10 με τις αριθμητικές λέξεις των μικρότερων αριθμών.

Όταν οι Κινέζοι πήγαιναν από ομιλούμενη αριθμητική λέξη στο την γραπτό αριθμητικό ψηφίο, διατηρούσαν το βασικό τους σύστημα. Σε κάθε αριθμό στο ομιλούμενο σύστημα αριθμητικών λέξεων εκχωρείται ένα ξεχωριστό πικτόγραμμα και η διαδικασία του συνδυασμού των αριθμών είναι ίδια. Στην αρχαία Κίνα αναπτύχθηκαν τέσσερα διαφορετικά γραπτά συστήματα τα βασικά αριθμητικά ψηφία, τα εμπορικά αριθμητικά ψηφία, τα επίσημα αριθμητικά ψηφία και τα ραβδόμορφα αριθμητικά ψηφία. Χρησιμοποιώντας τα εμπορικά αριθμητικά ψηφία.

Στα κινέζικα, ο αριθμός γράφεται από πάνω προς τα κάτω αντί να γράφεται από αριστερά προς τα δεξιά. Όταν οι Κινέζοι πηγαίνουν από την αριθμητική λέξη στο γραπτό αριθμητικό ψηφίο, εξακολουθούν να μην έχουν ένα σύστημα που καθορίζεται από τη θέση, όπως το ινδοαραβικό σύστημα. Για κάθε ψηφίο χρησιμοποιείται ένα ζεύγος συμβόλων, όπου το ένα σύμβολο δηλώνει το αριθμητικό ψηφίο και το δεύτερο σύμβολο δηλώνει την τιμή λόγω της θέσης. Επομένως, είναι δυνατόν να αλλάξουμε τις θέσεις των ζευγών των κινέζικων αριθμητικών συμβόλων χωρίς να χαθεί το νόημα. Με το δικό μας σύστημα, αν επιχειρήσουμε μια τέτοια αλλαγή αριθμός μεταβάλλεται

Οι Κινέζοι δεν ενοχλούνταν από την απουσία του μηδενός, αφού εν το χρειάζονταν. Όπως ακριβός εμείς δεν μπαίνουμε στον κόπο να πούμε «τέσσερις εκατοντάδες, μηδέν δεκάδες και επτά, οι Κινέζο μπορούσαν να αγνοούν το μηδέν τόσο στην ομιλούμενη όσο και στη γραπτή γλώσσα. Μόνο το δέκατο τρίτο αιώνα μ. Χ. άρχισε να εμφανίζεται στα γραπτά τους ένα σύμβολο για το μηδέν.'

Οι Κινέζοι έλυναν αόριστες εξισώσεις, τις οποίες ονόμαζαν ντα γεν Σε μια εξίσωση που δεν είναι αόριστη υπάρχει μία απάντηση, ή ένα μικρό σύνολο σωστών απαντήσεων. Σε μια αόριστη εξίσωση υπάρχει άπειρο πλήθος απαντήσεων. Για παράδειγμα, με το σημερινό σύστημα χαρακτήρων και συμβόλων θα μπορούσαμε να έχουμε την εξίσωση 3: 4-17. Μπορούμε να λύσουμε ως προς x αν αντικαταστήσουμε το y με κάποια τιμή και, αντιστρόφως, μπορούμε να λύσουμε ως προς y αν αντικαταστήσουμε το x με κάποια τιμή. Αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό κάνει «αόριστη την εξίσωση, οι λύσεις δηλαδή δεν είναι σαφώς καθορισμένες .

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΛΑΩΝ ΤΟΥ ΗΛΙΟΥ

ΙΝΚΑΣ

1410-1530 μ.Χ. Οι Ίνκας έφτιαξαν ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το 10, για να παρακολουθούν τις καθημερινές δραστηριότητες του μεγάλου πληθυσμού τους (Μέσα σε 200 χρόνια είχαν πληθυσμό 6-12.000.000 άτομα). Το αριθμητικό τους σύστημα βασιζόταν στα κουιπού. Τα κουιπού ήταν περίπλοκα συστήματα σπάγκων με κόμπους που χρησίμευαν για την καταχώρηση και αποθήκευση αριθμητικών πληροφοριών.Το σύστημά τους ήταν δεκαδικό, θεσιακό, μη ψηφιακό.Οι Ίνκας έκαναν τις πράξεις τους χρησιμοποιώντας ένα είδος άβακα, το γιουπάνα. Το γιουπάνα ήταν μια πλάκα χωρισμένη σε τετράγωνα πάνω στα οποία τοποθετούσαν σπόρους καλαμποκιού που τους μετακινούσαν από τετράγωνο σε τετράγωνο για να κάνουν τους λογαριασμούς τους.

Είχαν ανακαλύψει τον δυαδικό κώδικα, 500 χρόνια πριν εφευρεθεί ο ηλεκτρονικός υπολογιστής!
Μια πιο σύγχρονη έρευνα έγινε από τον ανθρωπολόγο του Harvard, καθηγητή GaryUrton, ο οποίος κατάφερε να μελετήσει 450 από τα διασωθέντα quipu. Τα ευρήματα του, προκαλούν δέος για τον πολιτισμό των Ίνκας:

"Τα κορδόνια και οι κόμποι των quipu περιέχουν ένα δυαδικό κώδικα παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιούν σήμερα οι υπολογιστές, ικανό να μεταβιβάσει περισσότερους από 1.500 χαρακτήρες. Ο δημιουργός του quipu κάθε φορά έπρεπε να πάρει μια απόφαση μεταξύ δύο πιθανοτήτων: παραδείγματος χάρη να κρεμάσει το κορδόνι στο μπροστινό ή στο πίσω μέρος του βασικού οριζόντιου σπάγκου ή να δέσει ένα μάλλινο ή ένα βαμβακερό κορδόνι κλπ. Με δεδομένο ότι οι Ίνκας χρησιμοποιούσαν 24 διαφορετικά χρώματα σπάγκων για την δημιουργία ενός quipu, οι πιθανότητες που τελικά είχαν σε έναν κώδικα 7 bit ήταν 1536."

Με απλά λόγια, εάν δεχτούμε πως όλα αυτά είναι γεγονότα, τότε οι Ίνκας είχαν ανακαλύψει έναν δυαδικό κώδικα που τους επέτρεπε να μεταφέρουν περίπου 1536 μονάδες πληροφοριών και ο όποιος μοιάζει πολύ με αυτόν των σύγχρονων ηλεκτρονικών υπολογιστών. Ο Urton υποστηρίζει ότι με το σύστημα αυτό οι Ίνκας όχι μόνο κατέγραφαν αριθμητικές πληροφορίες αλλά είναι πολύ πιθανό να περνούσαν στα quipu και την ιστορία του πολιτισμού τους.

ΜΑΓΙΑ

Η ανάπτυξη των μαθηματικών και της αστρονομίας είναι στενά δεμένη με τη θρησκεία τους. Στους υπολογισμούς τους χρησιμοποιούσαν ένα εικοσαδικό σύστημα, με την τελεία ως σημείο αρίθμησης. Η αστρονομία τους υποστήριξε ένα ημερολογιακό σύστημα , η χρονολογία έναρξης του οποίου είναι το 3115 π.Χ. Οι αστρονόμοι Μάγια έκαναν πίνακες των θέσεων της Σελήνης και της Αφροδίτης και ήταν ικανοί να προβλέψουν τις εκλείψεις του ηλίου.

ΑΖΤΕΚΟΙ

Οι Αζτέκοι δεν διαφέρουν πολλοί από τους άλλους λαούς του ήλιου γιατί έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά.

Αρχαίοι Έλληνες και αριθμοί

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν γράμματα αντί για αριθμούς κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορούν να κάνουν πολύπλοκους υπολογισμούς με απόλυτη ακρίβεια. Τα ψηφία 1, 2, 3, ... που χρησιμοποιούμε σήμερα ακόμα δεν είχαν διαμορφωθεί, ενώ δεν υπήρχε το σύστημα του δεκαδικού τρόπου αναγραφής σε στήλες μονάδων, δεκάδων κλπ, το οποίο πρώτοι εφάρμοσαν οι Ινδοί και διέδωσαν μεταγενέστερα οι Άραβες. Παρόλα αυτά, ο Αρχιμήδης κατόρθωσε με γεωμετρικούς, αλλά και αριθμητικούς υπολογισμούς, να εκτιμήσει τον αριθμό των κόκκων άμμου της Γης, πράγμα αφάνταστο για την εποχή του, αφού οι τότε επιστήμονες αρκούνταν να πιστεύουν ότι οι κόκκοι της άμμου είναι αμέτρητοι. Το έργο του αυτό, με τον τίτλο Ψαμμίτης, είναι ορόσημο της μαθηματικής επιστήμης.

Μονάδες			Δεκάδες			Εκατοντάδες			Χιλιάδες	
1	α′	Α	10	ι′	Ι	100	ρ′	Ρ	1000	‘α
2	β′	Β	20	κ′	Κ	200	σ′	Σ	2000	’β
3	γ′	Γ	30	λ′	Λ	300	τ′	Τ	3000	‘γ
4	δ′	Δ	40	μ′	Μ	400	υ′	Υ	4000	’δ
5	ε′	Ε	50	ν′	Ν	500	φ′	Φ	5000	‘ε
6	ς′	*	60	ξ′	Ξ	600	χ′	Χ	6000	’ς
7	ζ′	Ζ	70	ο′	Ο	700	ψ′	Ψ	7000	‘ζ
8	η´	Η	80	π′	Π	800	ω′	Ω	8000	’η
9	θ′	Θ	90	ϟ′	*	900	ϡ′	*	9000	‘θ

* ς′ = στίγμα
ϟ′ = κόππα
ϡ′ = σαμπί

Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι

Οι *Πυθαγόρειοι φιλόσοφοι* είναι μια φιλοσοφική, θρησκευτική και πολιτική σχολή που ιδρύθηκε τον 6ο αιώνα π.Χ από τον Πυθαγόρα τον Σάμιο στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας. Η κοινότητα στεγαζόταν σε ένα μεγάλο οίκημα, το Ομακοείον, όπου ο Πυθαγόρας δίδασκε τους -και των δυο φύλων- μαθητές του. Η διδασκαλία γινόταν με προφορικό τρόπο και οι προϋποθέσεις για την είσοδο των μαθητών ήταν αυστηρές. Ο μαθητής έπρεπε να υιοθετήσει έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο ζωής, να ασκηθεί στην εγκράτεια, να τηρεί απόλυτη σιωπή για κάποια έτη, να απέχει από συγκεκριμένες τροφές και να κάνει καθαρμούς.

Οι γνώσεις μας για τους πυθαγόρειους, όπως και για τον ίδιο τον Πυθαγόρα, αντλούνται αποκλειστικά από έργα μεταγενέστερων συγγραφέων, στους οποίους περιλαμβάνονται και οι λεγόμενοι *«Νεοπυθαγόρειοι»*. Αναπόφευκτα λοιπόν, είναι αδύνατον να αποδειχθεί τι πραγματικά ανήκει στη σκέψη του ίδιου του Πυθαγόρα και τι στους μαθητές του.

Έργο

Οι Πυθαγόρειοι αντιλαμβάνονταν τους αριθμούς ως πλήθος ορισμένων αντικειμένων και τους απεικόνιζαν σε ψήφους. Με αυτό τον τρόπο παράστασης των αριθμών κατόρθωσαν να προβούν σε μια πρώτη βασική ταξινόμηση κατηγοριοποιώντας τους σε *«άρτιους»* και *«περιττούς»*. Έτσι ένας άρτιος αριθμός απεικονιζόταν με μια σειρά ψήφων που μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη, ενώ το αντίθετο συνέβαινε με έναν περιττό.

Μια άλλη θεωρία της αριθμητικής των Πυθαγορείων είναι αυτή των *«παραστατικών αριθμών»* όπου κάθε αριθμός (ως σύνολο ψήφων) μπορεί να απεικονίσει κάποιο γεωμετρικό σχήμα. Παραδείγματος χάριν, ο αριθμός 25 παριστάνει ένα τετράγωνο, ο αριθμός 21 ένα ισόπλευρο τρίγωνο και ο αριθμός 30 ένα ορθογώνιο. Η μελέτη των παραστατικών αριθμών οδήγησε τους Πυθαγορείους στην ανακάλυψη της μεθόδου για την εύρεση των *«πυθαγορείων τριάδων»*.

Τέλος, η ανακάλυψη της ασυμμετρίας είναι, σύμφωνα με τον έγκυρο σχολιαστή Πάππο από την Αλεξάνδρεια, επίτευγμα που επίσης ανήκει στους Πυθαγόρειους.

Χρυσή τομή

Στα Μαθηματικά και την τέχνη, δύο ποσότητες έχουν αναλογία χρυσής τομής αν ο λόγος του αθροίσματος τους προς τη μεγαλύτερη ποσότητα είναι ίσος με το λόγο της μεγαλύτερης ποσότητας προς τη μικρότερη. Η εικόνα στα δεξιά αναπαριστά τη γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω. Εκφρασμένο αλγεβρικά:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi,$$

όπου το γράμμα φ αντιπροσωπεύει την χρυσή τομή. Η τιμή του είναι:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\ldots.$$

Η χρυσή τομή αναφέρεται επίσης και ως **χρυσός λόγος** ή **χρυσός κανόνας**. Άλλα ονόματα είναι **χρυσή μετριότητα** και **Θεϊκή αναλογία**ενώ στον Ευκλείδη ο όρος ήταν **"άκρος και μέσος λόγος"**.

Πολλοί καλλιτέχνες και αρχιτέκτονες του 20ου αιώνα προσάρμοσαν τα έργα τους ώστε να προσεγγίζουν την χρυσή αναλογία—ιδίως στη μορφή του χρυσού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, στο οποίο ο λόγος της μεγαλύτερης πλευράς προς την μικρότερη είναι η χρυσή τομή—πιστεύοντας ότι αυτή η αναλογία είναι αισθητικά ευχάριστη. Οι Μαθηματικοί από την εποχή του Ευκλείδη μέχρι σήμερα έχουν μελετήσει τις ιδιότητες της χρυσής τομής, συμπεριλαμβανομένης της εμφάνισης της στις διαστάσεις ενός κανονικού πενταγώνου και ενός χρυσού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, το οποίο (όπως φαίνεται και στην διπλανή εικόνα) μπορεί να χωριστεί σε ένα τετράγωνο και ένα παρόμοιο παραλληλόγραμμο με τον ίδιο λόγο πλευρών όπως το αρχικό. Η χρυσή τομή έχει χρησιμοποιηθεί επίσης για την ανάλυση των αναλογιών φυσικών αντικειμένων καθώς και τεχνητών συστημάτων όπως οι οικονομικές αγορές.

Οι Πυραμίδες της Αιγύπτου, ο Παρθενώνας, η Μόνα Λίζα, ο ΤζόρτζΚλούνεϊ και το κορμί της ΜόνικαΜπελούτσι έχουν κάτι κοινό! Η θελκτικότητά τους λέγεται πως βασίζεται στη «ΧρυσήΤομή», τον μαγικό αριθμό 1,618033… που ορίζει την αρμονία και την ομορφιά!

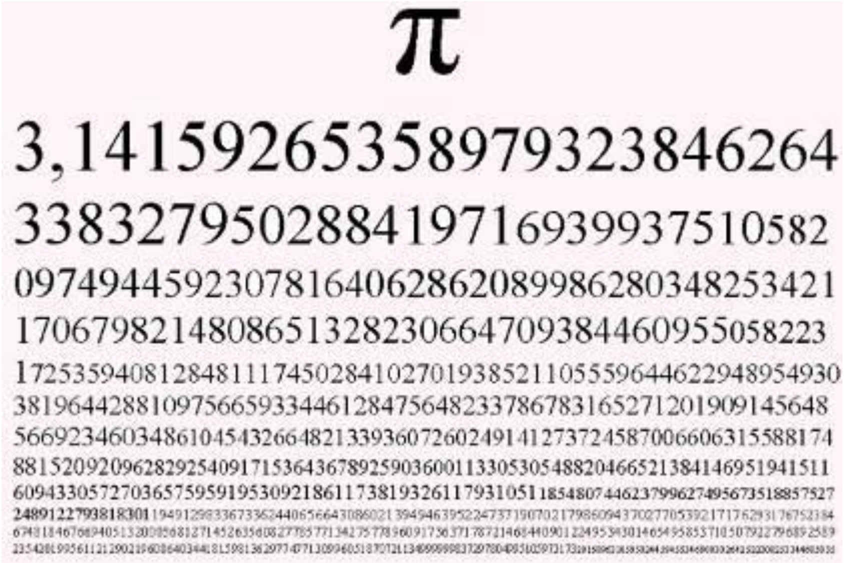
Αριθμός π

Ο αριθμός **π** (συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα π) είναι μια μαθηματική σταθερά που ορίζεται ως ο λόγοςτης περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου, και είναι με ακρίβεια οκτώ δεκαδικών ψηφίων ίσος με 3.14159265. Εκφράζεται με το ελληνικό γράμμα *π* από τα μέσα του 18ου αιώνα, παρότι επίσης μερικές φορές γράφεται ως **π**. Ο *π*είναι ένας άρρητος αριθμός, που σημαίνει ότι δεν μπορεί να εκφραστεί ακριβώς ως λόγος λόγος δύο ακεραίων (όπως 22/7 ή άλλα κλάσματα που χρησιμοποιούνται συνήθως για την προσέγγιση του π)· κατά συνέπεια, η δεκαδική απεικόνιση δεν τελειώνει ποτέ και ποτέ δεν εγκαθίσταται σε μια μόνιμη και επαναλαμβανόμενη παράσταση. Τα ψηφία εμφανίζονται να έχουν διανεμηθεί τυχαία, αν και η απόδειξη δεν έχει ανακαλυφθεί ακόμη. Ο π είναι ένας υπερβατικός αριθμός – δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι ότι είναι αδύνατο να λυθεί η αρχαία πρόκληση του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη.

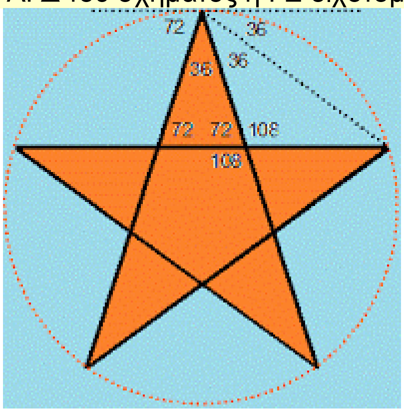
Για χιλιάδες χρόνια, μαθηματικοί προσπάθησαν να επεκτείνουν την κατανόησή τους πάνω στο π, κάποιες φορές με τον υπολογισμό της αξίας σε υψηλό βαθμό ακρίβειας. Πριν από τον 15ο αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Αρχιμήδης και ο LiuHui χρησιμοποίησαν γεωμετρικές τεχνικές βασιζόμενες σε πολύγωνα, για να υπολογίσουν την αξία του π. Περί τον 15ο αιώνα νέοι αλγόριθμοι βασιζόμενοι σε άπειρες σειρές ξεσηκώνουν τον υπολογισμό του π και χρησιμοποιούνται από μαθηματικούς όπως ο Madhava της Sangamagrama, οΙσαάκ Νιούτον, ο ΛέοναρντΌιλερ, ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους, και ο ΣρινιβάσαΡαμανούτζαν.

Τον 20ο και 21ο αιώνα, μαθηματικοί και πληροφορικοί ανακάλυψαν νέες προσεγγίσεις που – όταν συνδυάζονται με την αυξημένη υπολογιστική ισχύ – επεκτείνουν τη δεκαδική απεικόνιση του π πάνω από 10 τρισεκατομμύρια (10^{13}) ψηφία (2011). Οι επιστημονικές εφαρμογές απαιτούν γενικά όχι περισσότερα από 40 ψηφία του π· έτσι το πρωταρχικό κίνητρο για αυτούς τους υπολογισμούς είναι η ανθρώπινη επιθυμία για να σπάσει το ρεκορ. Οι εκτεταμένοι υπολογισμοί που εμπλέκονται στον υπολογισμό των ψηφίων του π έχουν χρησιμοποιηθεί για τη δοκιμή των υπερυπολογιστών και την υψηλη ακρίβεια στον πολλαπλασιασμό αλγορίθμων.

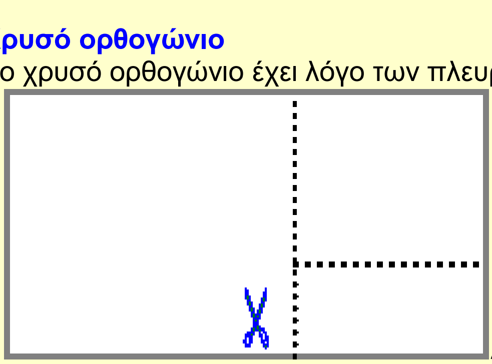
Το π βρίσκεται σε πολλά γεννήματα της Τριγωνομετρίας και της Γεωμετρίας, ειδικά όσον αφορά κύκλους, ελλείψεις ή σφαίρες. Βρίσκεται επίσης και σε άλλα γεννήματα από άλλους κλάδους της επιστήμης, όπως η Κοσμολογία, η Θεωρία Αριθμών, η Στατιστική, τα fractal, η Θερμοδυναμική, η Μηχανική, και ο Ηλεκτρομαγνητισμός. Ο καθολικός χαρακτήρας του π τον καθιστά μια από τις πιο ευρέως γνωστές μαθηματικές σταθερές, τόσο εντός όσο και εκτός της επιστημονικής κοινότητας. Το π έχει αποτελέσει θέμα λογοτεχνικών βιβλίων· ο αριθμός γιορτάζει την π ημέρα· και ρεκορ υπολογισμού των ψηφίων του π συχνά αναφέρονται σε τίτλους ειδήσεων. Αρκετοί άνθρωποι προσπάθησαν να απομνημονεύσουν την αξία του π με αυξανόμενη ακρίβεια, οδηγώντας σε εγγραφές ρεκορ απομνημόνευσης υπέρ των 67,000 ψηφίων.



Το αστέρι των Πυθαγορείων
Το σύμβολο της αδελφότητας των Πυθαγορείων ήταν το «πεντάγραμμο», το αστέρι δηλαδή που σχηματίζεται από τις πέντε διαγωνίους του κανονικού πενταγώνου. Αποδεικνύεται ότι κάθε πλευρά του «πενταγράμμου» διαιρεί τις δύο άλλες σε χρυσή τομή. Κάθε γωνία του «πενταγράμμου» είναι 36^0. Στο τρίγωνο ΑΓΔ του σχήματος η ΓΕ διχοτομεί τη γωνία ΑΓΔ άρα τέμνει κατά χρυσή τομή την ΔΓ.



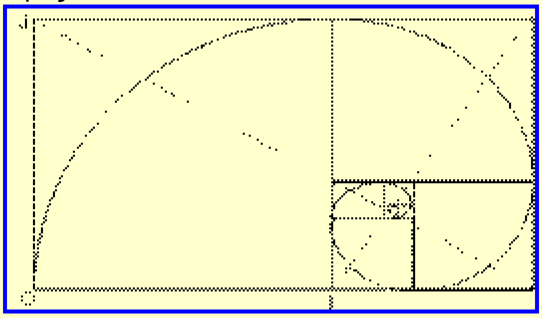
Χρυσό ορθογώνιο
Το χρυσό ορθογώνιο έχει λόγο των πλευρών του ίσο με φ. α/β = φ .



Αν του αποκόψουμε ένα τετράγωνο με πλευρά β, το ορθογώνιο με πλευρές β, γ που θα απομείνει θα είναι και πάλι χρυσό, θα είναι δηλαδή β/γ = φ και αυτό θα συνεχίζεται επ’ άπειρον.

Χρυσό σπιράλ, κοχύλια και ηλιοτρόπια

Εάν αντί να χρησιμοποιήσουμε το ψαλίδι σχεδιάσουμε πάνω στο αρχικό ορθογώνιο τις τομές και



σε κάθε τετράγωνο που δημιουργείται
σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα τεταρτοκύκλια
θα έχουμε αρχίσει να φτιάχνουμε
το χρυσό ελικοειδές, το σπιράλ
που σχεδιάζει η φύση και το διακρίνουμε
στα κουκουνάρια, στα κοχύλια,
στα ηλιοτρόπια και στους τρόπους με
τους οποίους διευθετούνται τα πέταλα, τα φύλλα και τα κλαδιά ποικίλων προσωρινών κατοίκων της γήινης βιόσφαιρας.

ο **φ** και η **Άλγεβρα**.

Ο φ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $φ^2 – φ -1 = 0$.

Ισχύει συνεπώς $φ^2 = 1+φ$ και **φ = Ö(1+φ)**

.

Η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την οικοδόμηση ενός άλλου ορισμού του φ.

φ = Ö{1+Ö(1+φ)}   ή φ = Ö{1+Ö(1+Ö1+φ)}

$$Φ = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$$

Αυτό μπορεί να συνεχίζεται επ’ άπειρον

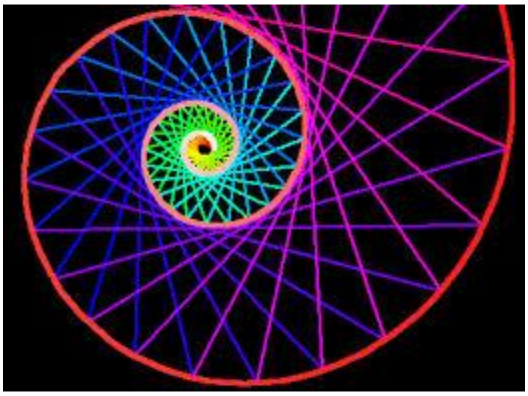
$$Φ = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

Για τον φ ισχύει επίσης: φ=1 +1/φ   φ=1+1/(1+1/φ)

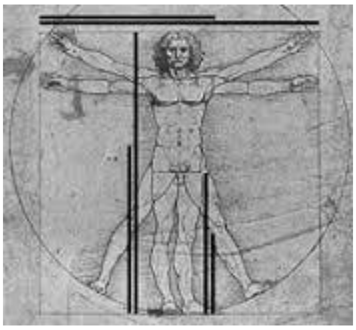
Για τον φ ισχύει ακόμα:

$φ = φ$, $φ^2 = φ + 1$ $φ^3 = 2φ + 1$,

$φ^4 = 3φ + 2$ $φ^5 = 5φ + 3$, $φ^6 = 8φ + 5, \ldots$



Ναυτίλος



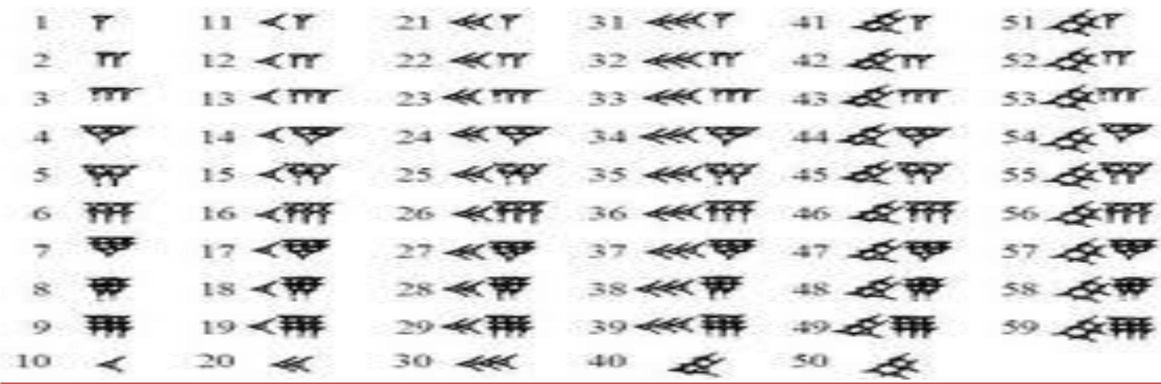
Βιτρούβιος

ΙΝΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι Ινδουιστές στην Ινδία δημιούργησαν ένα τέτοιο σύνολο από σύμβολα για τους αριθμούς, που το χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα. Από τους Ινδουιστές μαθαίνουμε τα εξής: 1=ένα, 2=δύο, 3=τρία, 4=τέσσερα, 5=πέντε, 6=έξι, 7=επτά, 8=οχτώ, 9=εννιά.Οι αριθμοί αυτοί ή οι αρχικοί τους πρόγονοι εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην Ινδία πριν από δύο χιλιάδες διακόσια χρόνια περίπου.

Στην αρχή οι Ινδοί (όπως και οι Αιγύπτιοι) έφτιαχναν καινούργια σύμβολα για αριθμούς μεγαλύτερους από εννέα. Είχαν διαφορετικά σύμβολα για το δέκα, το είκοσι, το τριάντα κλπ., όπως επίσης και για το εκατό, το διακόσια, το τριακόσια κ.ο.κ.Ο αριθμός διακόσια σημαίνει δύο φορές το "εκατό". Ο αριθμός είκοσι σημαίνει δύο "δέκα" και ο αριθμός δύο σημαίνει δύο φορές το "ένα". Σε κάθε περίπτωση ο αριθμός σήμαινε δύο φορές κάτι. Το σύμβολο στο δεξιό άκρο του αριθμού, μας δείχνει πόσες μονάδες έχει ο αριθμός. Το σύμβολο στα αριστερά του μας δείχνει πόσες δεκάδες υπάρχουν, το αμέσως επόμενο σύμβολο στα αριστερά μας δείχνει πόσες εκατοντάδες υπάρχουν κ.ο.κ. Η σημασία που έχει ένα σύμβολο εξαρτάται από τη θέση στην οποία βρίσκεται. Μ' αυτό τον τρόπο, τα εννιά ινδουιστικά ψηφία -1,2,3,4,5,6,7,8,9- πρέπει να είναι αρκετά για να γράφουμε τους αριθμούς.

ΟΑργιαμπχάτα εφεύρε ένα σύστημα στο οποίο οι δυνάμεις του 10 έως το 10 εις την δεκάτη σημειώνονται με μόνο ένα σημείο Η χρήση του δεκαδικού συστήματος στάθηκε η προϋπόθεση όλων των προόδων που επακολούθησαν στα μαθηματικά.Στην αριθμητική, η μέθοδος των τριών ήταν γνωστή, και οι σύνθετες μέθοδοι ονομάζονταν μέθοδος των πέντε, μέθοδος των επτά κ.τ.λ. Επίσης γνωστή ήταν η μέθοδος υπολογισμού του τόκου. Τέλος πιστεύεται ότι οι Ινδοί και κυρίως ο Αργιαμπχάτα (μαθηματικός) γνώριζαν τον τρόπο επίλυσης απροσδιορίστων εξισώσεων β΄ βαθμού.



ΡΩΜΑΪΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι Ρωμαίοι ξεκίνησαν το σύστημά τους συμβολίζοντας τον αριθμό ένα με I. Για το δύο, το τρία και το τέσσερα είχαν τα σύμβολα II, III και IIII. Μέχρι εδώ το σύστημα αυτό μοιάζει με το αιγυπτιακό σύστημα, μόνο που οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν μόνο τέσσερα όμοια σύμβολα προτού φτιάξουν ένα καινούργιο σύμβολο. Αντί να γράφουν το πέντε όπως οι Αιγύπτιοι, IIIII, το έγραφαν V.Αντί να γράφουν το έξι σαν IIIIII έγραφαν VI και για το εννέα έγραφαν VIIII. Αν έγραφαν το δέκα VIIIII, αυτό θα σήμαινε ότι χρησιμοποιήθηκαν πέντε σύμβολα I και αυτό δεν επιτρεπόταν. Γι' αυτό είχαν βρει ένα καινούργιο σύμβολο για το δέκα το X. Ο πίνακας των συμβόλων μέχρι το χίλια είναι ο εξής:

I = ένα
V= πέντε
X= δέκα
L= πενήντα
C= εκατό
D= πεντακόσια
M= χίλια

Επειδή οι Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν ιδιαίτερα σύμβολα για το πέντε, το πενήντα και το πεντακόσια, δεν χρειαζόταν ποτέ να γράφουν περισσότερες από τέσσερις φορές οποιοδήποτε από τα σύμβολα για το ένα, το δέκα και το εκατό. Το είκοσι το έγραφαν XXII και το εβδομήντα τρία LXXIII. Το τετρακόσια δεκαοχτώ το έγραφαν CCCCXVIII και το χίλια εννιακόσια ενενήντα εννέα MDCCCCLXXXXVIII.

Αργότερα οι Ρωμαίοι σκέφτηκαν να ελαττώνουν έναν αριθμό που απεικόνιζαν με ένα ιδιαίτερο σύμβολο. Αφού τα σύμβολα γράφονταν πάντα από τα αριστερά προς τα δεξιά και από το μεγαλύτερο στο μικρότερο, γιατί καμιά φορά να μηναντιστρέφεται η σειρά; Όταν βάζουμε το μικρότερο σύμβολο μετά το μεγαλύτερο, με το συνηθισμένο τρόπο, είναι σαν να προσθέτουμε τα δύο σύμβολα. Επομένως το VI είναι "πέντε και ένα", δηλαδή έξι. Αν, όμως, βάζουμε το μικρότερο σύμβολο πριν από το μεγαλύτερο, τότε το αφαιρούμε από το μεγαλύτερο. Έτσι το IV είναι "πέντε μείον ένα", δηλαδή τέσσερα.

Οι λαοί της δυτικής Ευρώπης εξακολούθησαν να χρησιμοποιούν τα ρωμαϊκά ψηφία για περισσότερο από εφτακόσια χρόνια μετά το τέλος της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας.

Οι Ινδοί χρησιμοποίησαν κάποιους ειδικούς κανόνες οι οποίοι προϋπόθεταν ότι ο αριθμός γραφόταν με δεκαδική σημειογραφία, με την πρέπουσα σπουδαιότητα αποδιδόμενη στη θέση του μηδενός και της υποδιαστολής. Η χρήση του δεκαδικού συστήματος στάθηκε η προϋπόθεση όλων των προόδων που επακολούθησαν στα μαθηματικά Αυτή η θεμελιώδης ανακάλυψη δόθηκε στον κόσμο από τους Ινδούς αλλά δεν είναι γνωστό ποια χρονολογία. Υποτέθηκε ότι η αρχή της δεκαδικής σημειογραφίας θα μπορούσε να έχει προέλθει από τη Βαβυλώνα, Αλλά δεν θα πρέπει να απορριφθεί η υπόθεση ότι είχε ίσως ξανά εφευρεθεί. Η ιδέα ενός τέτοιου συστήματος μπορούσε να έλθει φυσικά σε καθένα που έχει συνηθίσει, όπως οι Ινδοί, να κάνει ταχυδακτυλουργίες με δυνάμεις του 10.. Στην αριθμητική, η μέθοδος των τριών ήταν γνωστή, και οι σύνθετες μέθοδοι ονομάζονταν μέθοδος των πέντε, μέθοδος των επτά κ.τ.λ. Επίσης γνωστή ήταν η μέθοδος υπολογισμού του τόκου. Τέλος πιστεύεται ότι οι Ινδοί και κυρίως ο Αργιαμπχάτα (μαθηματικός) γνώριζαν τον τρόπο επίλυσης απροσδιορίστων εξισώσεων β΄ βαθμού.

ΡΩΜΑΪΚΗ ΑΡΙΘΜΗΣΗ

Βασικά σύμβολα: I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000.

Κανόνες. – α) Κάθε αριθμός, που παριστάνεται με σύμβολα κατά μη αύξουσα αξία, είναι το αθροισμα των αριθμών, που παριστάνουν τα εις την παράστασή του χρησιμοποιούμενα σύμβολα π.χ.:
MDCCLXXVI = 1000+500+100+100+50+10+10+5+1 = 1776

β) Άν ένα σύμβολο παριστάνει αριθμό μικρότερο από εκείνον, που παριστάνει το αμέσως δεξιότερά του σύμβολο, τότε ο πρώτος αφαιρείται από το δεύτερο, π.χ.
IX = 10 − 1 = 9, XL = 50 − 10 = 40, CM = 1000 − 100 = 900

γ) Αριθμητικό σύμβολο με μικρό ευθύγραμμο τμήμα υπεράνω του δηλώνει το 1000πλάσιο του αριθμού, που παριστάνει το αριθμητικό σύμβολο εκείνο π.χ. $\bar{X} = 1000 \times 10 = 10\,000$, $\bar{C} = 1000 \times 100 = 100\,000$.

Ρωμαϊκοί αριθμοί και οι αντίστοιχοί τους αραβικοί:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC		
20	30	40	50	60	70	80	90		
C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	M
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

Τό σύμβολο γιά τό 500 ἦταν ἕνα κομμάτι τοῦ συμβόλου γιά τό 1000. Στά κατοπινά χρόνια μετατράπηκε στό γράμμα "D". Αὐτό γίνηκε γιά νά καταστοῦν ἁπλούστερα τά τυπογραφικά στοιχεῖα. Ἄλλη ἁπλούστευψη ἦταν ἡ παράσταση τοῦ 1000 μέ Μ. Ἔτσι, ὅμως, χάθηκε ἡ ὁμοιομορφία, γιατί τό ἀρχικό σύμβολο γιά τό 1000 προσφερόταν στή γραφή

CCIↃↃ γιά τό 10 000 καί CCCIↃↃↃ γιά τό 100 000.

Γιά τήν παράσταση μεγάλων ἀριθμῶν μέ τά νεώτερα ρωμαϊκά σύμβολα εἶχαν γίνει ἀποδεχτά διάφορα τεχνάσματα. Μιά ὁριζόντια γραμμή πάνω ἀπό τό σύμβολο ἀριθμοῦ σήμαινε πώς ὁ ἀριθμός αὐτός πολλαπλασιάζεται μέ 1000.

ΑΡΑΒΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Η διάδοσή τους στον αραβικό κόσμο ανάγεται στο 771,όταν κάποιοι Ινδοί μαθηματικοί έφτασαν στη Βαγδάτη.Τον 9ο αιώνα έμποροι έφεραν στην Ευρώπη την αραβική μετάφραση ενός ινδικού χειρογράφου για τους αριθμούς.Αυτό υπήρξε η αφορμή των μετέπειτα παρεξηγήσεων.Όταν το κείμενο μεταφράστηκε στα λατινικά, τα νέα σύμβολα ονομάστηκαν "αραβικοίαριθμοί". Αυτοί άρχισαν να διαδίδονται στην Ευρώπη το 1200 μ.Χ. και η γραφή τουςυπέστη πολλές τροποποιήσεις. Το 1299, στη Φλωρεντία, απαγορεύτηκε η χρήση τους κατά τις εμπορικές συναλλαγέςεπειδή ήταν εύκολη η παραποίησή τους (π.χ. το 0 εύκολα μετατρεπόταν σε 6). Η γραφιστική τους ποικιλομορφία συνεχίστηκε μέχρι την επινόηση της τυπογραφίας από τον Γουτεμβέργιο (1445). Αντίθετα, οι αριθμοί που χρησιμοποιούνται στον αραβικό κόσμο μοιάζουν περισσότερο με τους αρχικούς ινδικούς αριθμούς.

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
صفر	واحد	إثنان	ثلاثة	أربعة	خمسة	ستّة	سبعة	ثمانية	تسعة	عشرة
ṣifer	waḥid	ithnān	thalatha	araba'a	khamsa	sitta	saba'a	thamānia	tisa'a	'ashara
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ΟΙ ΣΥΓΧΡΟΝΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Οι αριθμοί μπορούν να ταξινομηθούν στα εξής αριθμητικά συστήματα:

Σημαντικά αριθμητικά συστήματα		
$\mathbb{N}$	**Φυσικοί**	0, 1, 2, 3, 4, ... **ή** 1, 2, 3, 4, ...
$\mathbb{Z}$	**Ακέραιοι**	..., −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
$\mathbb{Q}$	**Ρητοί**	$^{\alpha}/_{\beta}$ όπου *α* και *β* είναι ακέραιοι και *β* δεν είναι 0
$\mathbb{R}$	**Πραγματικοί**	Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας των ρητών αριθμών
$\mathbb{C}$	**Μιγαδικοί**	*α* + *βi* ή *α* + *iβ* όπου *α* και *β* είναι πραγματικοί και *i* είναι η τετραγωνική ρίζα του −1

Φυσικοί αριθμοί

Είναι οι πιο γνωστοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... Παραδοσιακά, η ακολουθία των φυσικών αριθμών ξεκίνησε με 1. Ωστόσο, τον 19ο αιώνα οι θεωρητικοί μαθηματικοί άρχισαν να συμπεριλαμβάνουν το 0 στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Το μαθηματικό σύμβολο για το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών είναι $\mathbb{N}$, και μερικές φορές γράφεται $\mathbb{N}_0$ ή $\mathbb{N}_1$ για να δηλωθεί εάν το σύνολο έχει ως αρχή 0 ή 1 αντιστοίχως.

Ακέραιοι

Το αρνητικό από ένα θετικό ακέραιο ορίζεται ως ένας αριθμός που παράγει μηδέν όταν προστίθεται στο αντίστοιχο θετικό ακέραιο. Το σύνολο των ακεραίων συμβολίζεται ως **Z**.

Ρητοί Αριθμοί

Ένας ρητός αριθμός είναι ένας αριθμός που μπορεί να εκφραστεί ως κλάσμα με έναν ακέραιο αριθμητή και ένα μη-μηδενικό φυσικό αριθμό παρονομαστή. Στο κλάσμα γράφουμε $^m/_n$ ή

$$\frac{m}{n}$$

το *m*προσωπεύει τα ίσα μέρη,όπου τα *n* ίσα μέρη αυτού του μεγέθους αποτελούν *m* σύνολα. Το σύμβολο για τους ρητούς αριθμούς είναι **Q** .

Πραγματικοί Αριθμοί

Οι πραγματικοί αριθμοί περιλαμβάνουν το σύνολο των μετρήσιμων αριθμών. Οι πραγματικοί αριθμοί είναι συνήθως γραμμένοι με δεκαδικά ψηφία, στα οποία τοποθετείται υποδιαστολή στα δεξιά του ψηφίου με την τιμή θέσεως 1. Κάθε ψηφίο στα δεξιά της υποδιαστολής έχει μια τιμή θέσεως που αποδίδει το ένα δέκατο της τιμής θέσεως του ψηφίου στα αριστερά του. Εάν ένας πραγματικός αριθμός δεν μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα δύο ακεραίων, ονομάζεται Άρρητος. Ένας δεκαδικός που μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα είτε τερματίζει είτε επαναλαμβάνεται συνεχώς, γιατί είναι η απάντηση σε ένα πρόβλημα διαίρεσης. Έτσι, ο πραγματικός αριθμός 0.5 μπορεί να γραφτεί ως $^1/_2$ και ο πραγματικός αριθμός 0.333 ... (που πάντα επαναλαμβάνεται το 3, ή διαφορετικά γράφεται 0.3) μπορεί να γραφεί ως $^1/_3$. Το σύμβολο για τους πραγματικούς αριθμούς είναι **R**.

Μιγαδικοί Αριθμοί

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να επεκταθούν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούνται από όλους τους αριθμούς της μορφής

$$a + bi \text{ ή}$$

$$a + ib$$

όπου a και b είναι πραγματικοί αριθμοί. Στην έκφραση *a* + *bi*, ο πραγματικός αριθμός *a* ονομάζεται το πραγματικό μέρος και *β* καλείται το φανταστικό μέρος. Εάν το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού είναι 0, τότε ο αριθμός καλείται φανταστικός αριθμός. Εάν το φανταστικό μέρος είναι 0, τότε ο αριθμός είναι ένας πραγματικός αριθμός. Το σύμβολο των μιγαδικών αριθμών είναι *C*.

Υπολογίσιμοι Αριθμοί

Οι υπολογίσιμοι αριθμοί είναι οι πραγματικοί αριθμοί που μπορούν να υπολογιστούν με οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια από ένα πεπερασμένο, περατούμενο αλγόριθμο.

Άλλοι τύποι

Οι Αλγεβρικοί αριθμοί είναι εκείνοι που μπορούν να δοθούν ως λύση σε μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές. Το συμπλήρωμα των αλγεβρικών αριθμών είναι οι υπερβατικοί αριθμοί.

Οι υπερπραγματικοί αριθμοί (hyperrealnumbers) χρησιμοποιούνται στη μη τυπική ανάλυση. Οι υπερπραγματικοί αριθμοί συμβολίζονται με ***R.**

Ειδικές χρήσεις

Υπάρχουν επίσης και άλλα σύνολα αριθμών όπως είναι τα υποσύνολα των μιγαδικών αριθμών.

Ζυγός (ή άρτιος)αριθμός είναι ένας ακέραιος που διαιρείται με το 2, χωρίς υπόλοιπο. Ένας μονός (ή περιττός) αριθμός είναι ένας ακέραιος που δεν διαιρείται ομοιόμορφα με το 2.

Ένας πολυγωνικός αριθμός είναι ένας αριθμός που μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα κανονικό και ασυνεχές γεωμετρικό μοτίβο (π.χ. κουκκίδες).

ΠΗΓΕΣ

Ο ταξιδευτής των μαθηματικών, CalvinC. Clawson, Εκδόσεις Κέδρος.

Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών, LucasN.H. Bunt – PhillipS. Jones – JackD. Bedient, Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού

Ιστορία των μαθηματικών, Θεόδωρος Γ. Εξαρχάκος, Τόμος Α’ Και Β’

Συνοπτική ιστορία των μαθηματικών, DirkJ. Struik, Εκδόσεις Δαίδαλος – Γ. Ζαχαρόπουλος

Εγκυκλοπαίδεια Brittanica

Εγκυκλοπαίδεια Επιστήμη και Ζωή

http://www.glossesweb.com/2012/11/blog-post_20.html

http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_writing_ancient_numbers

http://www.mathemania.com/numbers.php

http://koytantosg.pblogs.gr/tags/istoria-ton-arithmon-gr.html

http://www.basic-mathematics.com/numeration-system.html

http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82

ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ-από τους μαθητές της Α' τάξης του Πειραματικού Λυκείου Μυτιλήνης,Άνοιξη 1999

http://blogs.sch.gr/ekoukogia/files/2014/05/%CE%97-%CE%B5%CF%81%CE%B3%CE%B1%CF%83%CE%AF%CE%B1-%CE%99%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%81%CE%AF%CE%B1-%CF%84%CF%89%CE%BD-%CE%B1%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8E%CE%BD.pdf

http://manosbee.blogspot.gr/2009/11/blog-post_9603.html

http://www.e-magazino.gr/endiaferonta/i-istoria-ton-arithmon.html

http://peirmathsgroup.blogspot.gr/p/blog-page.html

http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_mathematics

http://www.storyofmathematics.com/

http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/hist_frame.htm

https://youtu.be/cy-8lPVKLIo

http://e-archimedes.gr/links/item/4075-

http://www.aegean.gr/lykpeir/synergasies/SE%20%CE%99%CE%A3%CE%A4%CE%9F%CE%A1%CE%99%CE%91%20%CE%9A%CE%91%CE%99%20%CE%93%CE%A1%CE%91%CE%A6%CE%97%20%CE%A4%CE%A9%CE%9D%20%CE%91%CE%A1%CE%99%CE%98%CE%9C%CE%A9%CE%9D.html

Μια εργασία των μαθητών:

Σιδερά Ν., Κακουλίδη Θ., Μαλιαρόζη Γ., Κονταρά Π., Φέτσιου Κ. ΜουσταφαΙμπράμ Ν., Ζαχόπουλου Π., Μπαλάση Γ., Καρανικολίδη Σ., Ιωαννίδη Γ. Θεοδωρίδη Γ., Βλαχάκη Γ., Θεοδωρόπουλος Κ., Ιωακειμίδου Δ., Μουζάς Β., Παπάζογλου Θ., Τσεκμέζογλου Μ.

Υπεύθυνος Καθηγητής:

Καράουστας Ιορδάνης