Γεωμετρία Α΄ Λυκείου - 15/6/2015

Ενδεικτικές Λύσεις

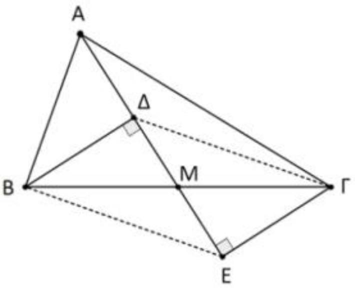
Θέμα Α

Α1. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

Α2. Θεωρία: Σχολικό βιβλίο, Πόρισμα ΙΙΙ, σελ. 42.

Θέμα Β

Β1. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:



1. $BM = M\Gamma$ (ΑΜ διάμεσος)
2. $B\hat{M}\Delta = \Gamma\hat{M}E$ (κατακορυφήν)

Άρα είναι ίσα (υποτείνουσα + οξεία γωνία)

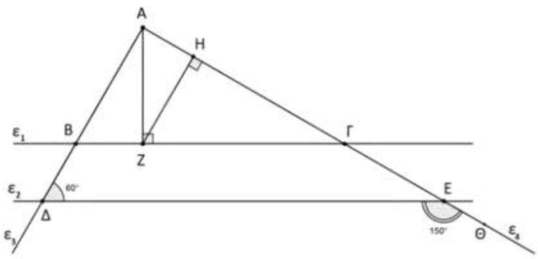
Β2. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα (ερώτημα Β1) άρα έχουν: $BM = M\Gamma$ και $\Delta M = ME$.

Άρα στο ΒΔΓΕ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

Β3. $\Gamma\hat{B}E = B\hat{\Gamma}\Delta$ ως εντός εναλλάξ γωνίες (ΒΕ//ΔΓ με τέμνουσα την ΒΓ)

Θέμα Γ

Γ1. $A\hat{B}\Gamma = 60^o$ (εντός, εκτός και επί τ' αυτά των παραλλήλων ε_1 και ε_2 με τέμνουσα την ε_3)



$B\hat{\Gamma}E = 150^o$ (εντός, εκτός και επί τ' αυτά των παραλλήλων ε_1 και ε_2 με τέμνουσα την ε_4)

Άρα: $B\hat{\Gamma}A = 180^o - B\hat{\Gamma}E = 180^o - 150^o = 30^o$.

Γ2. Στο τρίγωνο ΓΖΗ: $H\hat{\Gamma}Z + H\hat{Z}\Gamma = 90^o \Rightarrow 30^o + H\hat{Z}\Gamma = 90^o \Rightarrow H\hat{Z}\Gamma = 60^o$

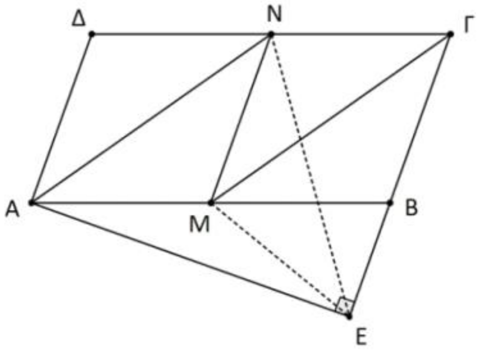
Είναι: $A\hat{Z}\Gamma = 90^o \Rightarrow A\hat{Z}H + H\hat{Z}\Gamma = 90^o \Rightarrow A\hat{Z}H + 60^o = 90^o \Rightarrow A\hat{Z}H = 30^o$

Γ3. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΗ είναι $A\hat{Z}H = 30^o$, άρα $AH = \frac{AZ}{2}$ (3)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΓ είναι $A\hat{\Gamma}Z = 30^o$, άρα $AZ = \frac{A\Gamma}{2}$ (4)

Από (3) και (4) έχουμε $AH = \frac{AZ}{2} = \frac{\frac{A\Gamma}{2}}{2} = \frac{A\Gamma}{4}$.

Θέμα Δ



Δ1. Είναι $MB = \frac{AB}{2}$ και $N\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Όμως, ΑΒ //= ΔΓ γιατί ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Επομένως ΜΒ//=ΝΓ και συνεπώς ΜΝΓΒ παραλληλόγραμμο.

Είναι, επίσης, $MB = \frac{AB}{2} = B\Gamma$. Άρα, το παραλληλόγραμμο ΜΝΓΒ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, δηλαδή είναι ρόμβος.

Δ2. ΑΒ//ΔΓ άρα και ΑΜ//ΝΓ. Είναι και $AM = N\Gamma = \frac{AB}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{2}$, επομένως ΑΜ//= ΝΓ και άρα το ΑΝΓΜ είναι παραλληλόγραμμο.

Δ3. ΝΜ//ΓΒ (ΜΝΓΒ ρόμβος), άρα και ΝΜ//ΓΕ δηλαδή ΜΝΓΕ τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ ($\hat{E} = 90^o$) είναι ΕΜ διάμεσος, επομένως $EM = \frac{AB}{2}$. Αλλά: $N\Gamma = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{AB}{2}$. Άρα: ΕΜ = ΝΓ, δηλαδή στο τραπέζιο ΜΝΓΕ οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες, επομένως ΜΝΓΕ ισοσκελές τραπέζιο.

Δ4. α) Επειδή ΑΝΓΜ παραλληλόγραμμο (ερώτημα Δ2) προκύπτει ΑΝ = ΓΜ (1)

Επειδή ΜΝΓΕ ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιοί του είναι ίσες και επομένως ΝΕ = ΜΓ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΝ = ΝΕ.

β) Είναι ΝΜ//ΓΕ (ΜΝΓΒ ρόμβος). Όμως έχουμε ότι ΑΕ⊥ΓΕ.

Άρα είναι και ΝΜ⊥ΑΕ.

<u>Σημείωση</u>: Τα περισσότερα ερωτήματα μπορούν να επιλυθούν με περισσότερους από έναν τρόπους (ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής: Β2, Β3, Γ1, Γ2, Δ1, Δ3, Δ4).